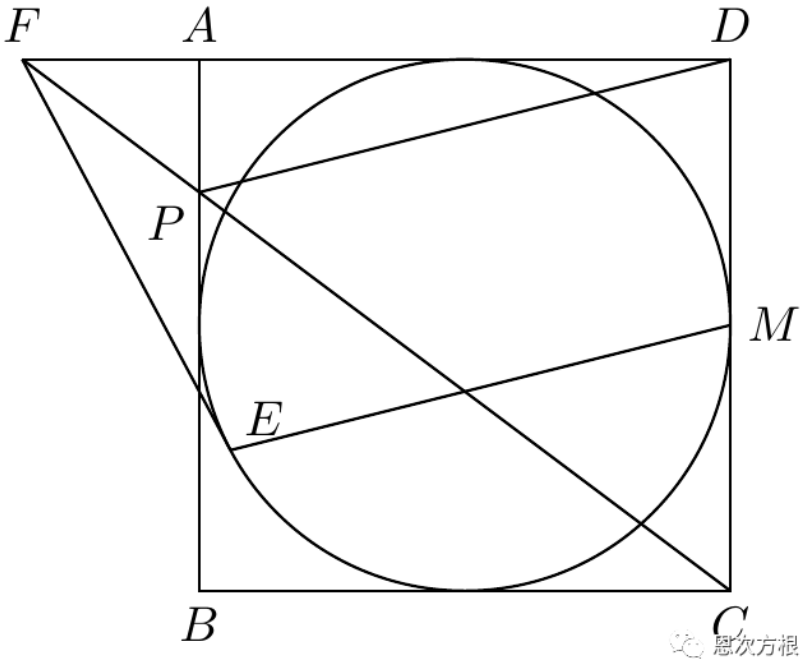
利用牛顿定理解一道几何题

2021-04-10　原文链接

题目 正方形 $ABCD$ 的内切圆为 Γ. 已知 M 为线段 CD 的中点. 在线段 AB 上任取一点 $P \neq B$. 过 M 作 DP 平行线与 Γ 再次交于点 E. 直线 CP，AD 交于点 F. 证明：直线 EF 与 Γ 相切. （2021 年法语数学奥林匹克高级组第 3 题）

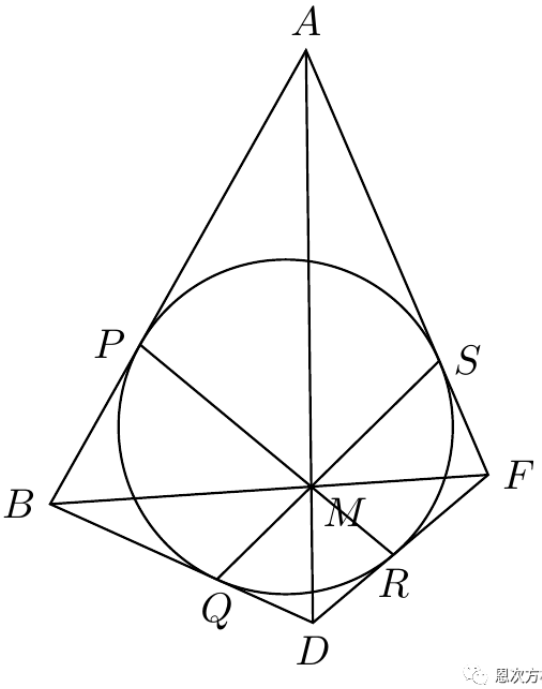


分析 本题结构比较简单，看到正方形后很快想到建系. 从纯几何角度考虑，题目中的诸多切线让我想到了牛顿定理.

牛顿定理[1]：圆的外切四边形的对角线的交点和以切点为顶点的四边形的对角线的交点重合.

此定理即是说：若凸四边形 $ABDF$ 外切于圆，边 AB，BD，DF，FA 上的切点分别为 P，Q，R，S，则四条直线 AD，BF，PR，QS 交于形内一点.

牛顿定理有许多种证明方法，这里我们只展示一种证明.



证明 如图，设 AD 和 PR 交于点 M，AD 和 QS 交于点 M'，下证 M 与 M' 重合.

由切线的性质，知 $\angle ASM' = \angle BQM'$，则有

$$\frac{AM' \cdot SM'}{QM' \cdot DM'} = \frac{S_{\triangle AM'S}}{S_{\triangle DM'Q}} = \frac{AS \cdot SM'}{DQ \cdot QM'}$$

即

$$\frac{AM'}{DM'} = \frac{AS}{DQ}$$

同理

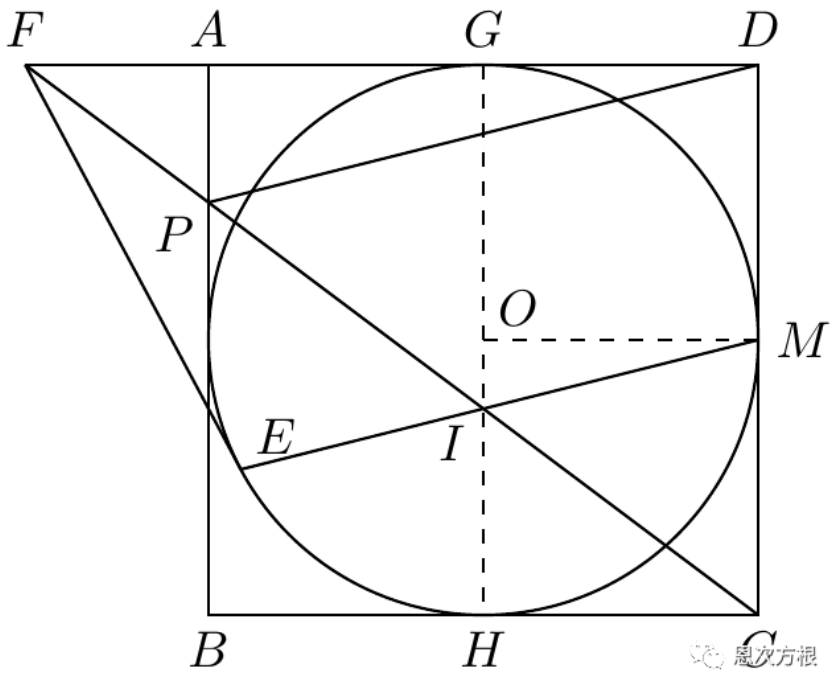
$$\frac{AM}{DM} = \frac{AP}{DR}$$

注意到 $AP = AS$，$DR = DQ$，则

$$\frac{AM}{DM} = \frac{AS}{DQ} = \frac{AM'}{DM'}$$

再由合比定理，有 $\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{AM'}{AD}$，于是 M 和 M' 重合，即知 AD，PR，QS 三线共点. 同理，BF，PR，QS 三线共点，故 AD，BF，PR，QS 四直线共点.

回到原题.



设 AD 中点为 G，BC 中点为 H，正方形 $ABCD$ 的内切圆圆心为 O，EM 和 GH 交于点 I.

由 $AD \parallel OM$ 和 $DP \parallel IM$ 知 $\angle ADP \sim \angle OMI$.

于是 $AP = 2OI$，又 $CA = 2CO$，故 I 在 CP 上.

考虑以 E，G，M，H 为切点的圆 O 的外切四边形，由牛顿定理知：点 I 为其对角线交点.

又 CI 和 AD 交于点 F，故 F 为 C 的相对顶点，于是 EF 为圆 O 的切线，证毕.

0.0.1 参考资料

[1]

牛顿定理: 摘自《几何瑰宝——平面几何 500 名题暨 1000 条定理（下)》