2021 年加拿大数学奥林匹克资格复活赛

2021-04-09 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_bb6062d3c71d91cc

昨天发的第二题有一个小错误，所以删了今天重新发一遍.

---

1. 求所有实系数多项式 p，使得对于任意实数 x，有

$$p(x+p(x))=x^2p(x).$$

1. 求方程组

$$\begin{cases}xy+yz+zx=-4\\x^2+y^2+z^2=24\\x^3+y^3+z^3+3xyz=16\end{cases}$$

的所有整数解.

1. $ABCDE$ 为正五边形. 圆 C_1 和 C_2 分别以 A 和 C 为圆心，且均过点 B. 设 C_1 和 C_2 另一个交点为 P. 以 P 为圆心且过 D 和 E 的圆交 C_2 于点 X，交 AE 于点 Y. 求证：$AX=AY$.

2. 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，内心为 I. 过 I 作 IO 的垂线交 $\triangle ABC$ 的内切圆于 P，Q 两点. 证明：$\triangle ABC$ 的外接圆直径等于 $\triangle OPQ$ 的周长.

3. Alphonse 和 Beryl 进行一个游戏. 开始时，有两个边长为整数的矩形. 从 Alphonse 开始，双方轮流进行如下操作：选择其中一个矩形，将其沿着于边平行的方向切割为两个边长均为整数的矩形. 然后从三个矩形（未切割的矩形以及切割成的两个矩形）中丢弃一个，保留剩下两个给另一个玩家. 如果玩家无法切割矩形，则该玩家负.
   在下面两个游戏中，哪个玩家将获得胜利：（1）开始的两个矩形为 1×2020 和 2×4040；（2）开始的两个矩形为 100×100 和 100×500.

4. 证明方程

$$w^2+11x^2-8y^2-12yz-10z^2=0$$

   的整数解只能为 $(w,x,y,z)=(0,0,0,0)$.

5. 实数 A，B，C 满足

$$\cos(B-C)+\cos(C-A)+\cos(A-B)=-\frac{3}{2},$$

求 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的值.

6. 国王 Radford 在他的宫殿举行宴会. 他有一张巨大的圆形桌子，周围放着 2021 张椅子. 在国王的生日宴会上，他坐在他的宝座上（其中 2021 张椅子之一），而其余 2020 张椅子上则坐满了客人. 最矮的客人坐在国王的左边，其余的客人从下一个位置开始按照高度递增的顺序依次就座. 国王宣布，其他所有人从椅子上站起来，绕着桌子随意跑动，再重新在椅子上坐下. 这样做之后，国王注意到坐在他左边的人与之前不同，而桌子上其他人也注意到坐在它们左边的人是与之前不同的.

求客人第二次入座的方法总数. 可以用 D_n（n 元集合的排列个数）作为答案的一部分.