两道条件为 x+y+z=xy+yz+zx 的不等式

2022-09-27 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_bbbdf678628ddddb

今天，在不等式爱好者群中，吴老师问了如下不等式：

实数 x，y，z 满足 $x+y+z=xy+yz+zx$. 证明：

$$\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}\geq -\frac{1}{2}.$$

以下为我的证明：

引理：

若 $x+y+z=xy+yz+zx$，则 $(y+z)(yz+1)$、$(z+x)(zx+1)$、$(x+y)(xy+1)$ 中至少有一个非负.

引理的证明：

反证. 否则 $(y+z)(yz+1)$、$(z+x)(zx+1)$、$(x+y)(xy+1)$ 均为负数. 对 $x+y$、$y+z$、$z+x$ 的正负分类讨论：

$(1)x+y$、$y+z$、$z+x$ 均为非负. 则 $yz+1$、$zx+1$、$xy+1$ 均为负数. 此时

$$\begin{aligned}0\leq&(x+y)+(y+z)+(z+x)\\=&2(xy+yz+zx)<-6\end{aligned}$$

矛盾.

$(2)x+y$、$y+z$、$z+x$ 中恰有一个为负数. 不妨设 $y+z<0$. 则

$$2x=(x+y)+(z+x)-(y+z)>0$$

即 $x>0$. 且 $xy+1<0$，$xz+1<0$. 故 $y<0$，$z<0$. 设 $y=-a$，$z=-b$. $(a,\ b>0)$

则 $x+y=x-a\geq 0$，即 $x\geq a$.

$xy+1=1-ax<0$，即 $a>\dfrac{1}{x}$.

于是 $x\geq a>\dfrac{1}{x}$，同理 $x\geq b>\dfrac{1}{x}$，于是 $x>1$.

而由 $x+y+z=xy+yz+zx$ 知 $x=\dfrac{ab+a+b}{a+b+1}$.

$$x\geq a\Rightarrow ab+a+b\geq a^2+ab+a\Rightarrow b\geq a^2$$

$$x\geq b\Rightarrow ab+a+b\geq ab+b^2+b\Rightarrow a\geq b^2$$

$$x>1\Rightarrow ab+a+b>a+b+1\Rightarrow ab>1$$

三式相乘得 $a^2b^2>a^2b^2$，矛盾.

(3)$x+y$、$y+z$、$z+x$ 中恰有两个为负数. 不妨设 $y+z<0$，$z+x<0$. 则

$$2z=(y+z)+(z+x)-(x+y)<0$$

即 $z<0$.

由 $x+y\geq 0$ 知 $xy+1<0$，即 $xy<0$，由对称性不妨设 $y>0$，$x<0$. 设 $x=-a$，$z=-b$ $(a,b>0)$.

由 $yz+1\geq 0$，$xy+1<0$ 知：$b\leq \dfrac{1}{y}<a$.

由 $y+z<0$，$x+y\geq 0$ 知：$a\leq y<b$.

两式相乘得 $ab<ab$，矛盾.

(4)$x+y$、$y+z$、$z+x$ 均为负数. 则 x，y，z 均为负数. 此时

$$\begin{aligned}0>&(x+y)+(y+z)+(z+x)\\=&2(xy+yz+zx)>0\end{aligned}$$

矛盾.

引理得证.

回到原题

由引理不妨设 $(y+z)(yz+1)\geq 0$. 于是

$$\begin{aligned}&\sum\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}\\=&\frac{(x+1)^2}{2(x^2+1)}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}\\\geq&\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}\\=&\frac{(y+z)(yz+1)}{(y^2+1)(z^2+1)}\\\geq&0\end{aligned}$$

2019 年伊朗 IMO 代表队选拔考试中有一道与此类似的题：

实数 x，y，z 满足 $x+y+z=xy+yz+zx$. 证明：

$$\sum\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\geq-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

解答（PDF 中已展开）

解答如下：

参考答案 本题还是挺有趣的，首先从条件入手，这个条件不太适合换元，只能讨论一下不同的情况了，然后我们便来到了本题的核心，这里我发现了 $\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}}$ 关于倒数对称，于是这里结合倒数对称，一番探索便证明了出来，证明的方法还不太常见：

注意到用 $\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ 替换 x,y,z 则条件式仍成立，且待证式左边值不变.

分析符号，若 $x,y,z\geq 0$，则左边 $\geq 0>-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 成立，而 $x,y,z<0$ 显然不行，于是可知 x,y,z 中两负一非负或两非负一负.

若两负一非负，不妨令 $x,y<0$，则出于方便，分别用 $-x,-y>0$ 替换 x,y，则条件式变为 $z=\frac{xy+x+y}{x+y+1}=1+\frac{xy-1}{x+y+1}$，由倒数对称，不妨令 $xy\geq 1$，则 $z\geq 1$，且原式等价于 $\frac{z}{\sqrt{z^4+z^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\geq\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^4+y^2+1}}$.

由 x,y 的对称性，不妨设 $x\leq y$，若 $z>y$，则有 $\frac{xy+x+y}{x+y+1}>y$，这等价于 $y>y^2$，这由 $xy\geq 1$ 且 $y\geq x$ 知不可能，于是 $z\leq y$，注意到 $f(t)=\frac{t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{t^2+\frac{1}{t^2}+1}}$ 当 $t\geq 1$ 时关于 t 单调减，于是可知 $f(z)\geq f(y)$.

由均值，$\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\leq\frac{x}{\sqrt{3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，综上可知上式成立.

若两非负一负，不妨令 $x,y\geq 0$，仿上用 $-z>0$ 替换 z，则原式等价于 $\frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}+\frac{y}{\sqrt{y^4+y^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\geq\frac{z}{\sqrt{z^4+z^2+1}}$，仿上直接由 $\frac{z}{\sqrt{z^4+z^2+1}}\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$ 便得证.