国外近三年不等式精选 20 题（含解析）

2026-08-15　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_bbd7d41eac04ebda

为助力各位老师同学备考联赛，我整理了近三年国外比赛中的 20 道不等式问题。选题范围为数之谜题库的补集，相对较新，所以更适合已经刷过不少题目的同学使用。部分题目之前在“一分钟做不等式系列”合集中已经出现，也欢迎大家分享更多好题。

每道题目下方有来源和跳转链接，每页一题，可直接打印使用，后 20 页为解析。

第 1 题

题目　证明：存在正整数 n 及两列非负实数

$$0 \le a_1 \le \cdots \le a_n, \qquad 0 \le b_1 \le \cdots \le b_n,$$

满足

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ge 2025^{2025}, \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i \ge 2025^{2025}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \min\{a_i, b_i\} \le \frac{1}{2025^{2025}}.$$

并求满足条件的 n 的最小值。

来源　2025 Brazilian Mathematical Olympiad ↗

第 2 题

题目　设 $(a_n)_{n\ge 1}$ 是正整数数列，并且对于任意正整数 $k < \ell$、任意互不相同的指标 $m_1, \ldots, m_k$ 及任意互不相同的指标 $n_1, \ldots, n_\ell$，都有

$$a_{m_1} + \cdots + a_{m_k} \le a_{n_1} + \cdots + a_{n_\ell}.$$

证明：存在正整数 N, b，使得 $a_n = b$ 对所有 $n \ge N$ 成立。

来源　2025 Olympiade Francophone de Mathematiques, Senior Division, Problem 1 (official solution) ↗

第 1 题解析

题目　证明：存在正整数 n 及两列非负实数

$$0 \le a_1 \le \cdots \le a_n, \qquad 0 \le b_1 \le \cdots \le b_n,$$

满足

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ge 2025^{2025}, \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i \ge 2025^{2025}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \min\{a_i, b_i\} \le \frac{1}{2025^{2025}}.$$

并求满足条件的 n 的最小值。

来源　2025 Brazilian Mathematical Olympiad ↗

解答　令 $t = 2025^{2025}$。不妨设 $a_n \le b_n$。因为两列均递增，

$$\frac{1}{t} \ge \sum_{i=1}^{n} \min(a_i, b_i) \ge \min(a_n, b_n) = a_n \ge \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \ge \frac{t}{n}.$$

故 $n \ge t^2$。

取 $n = t^2$，并令

$$a_1 = \cdots = a_{t^2} = \frac{1}{t}, \qquad b_1 = \cdots = b_{t^2-1} = 0, \quad b_{t^2} = t.$$

则两列递增，两列之和都等于 t，而 $\sum \min(a_i, b_i) = 1/t$。所以最小值为

$$n = t^2 = 2025^{4050}.$$