数学竞赛每日一练第 2 期解答

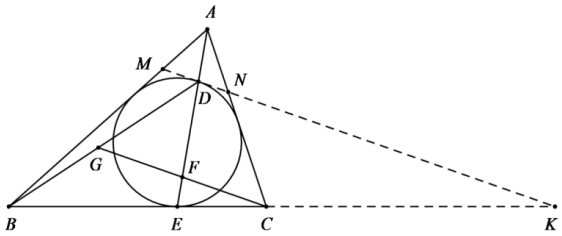
2021-06-05 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_bc60eaac8248a0d2

在 $\triangle ABC$ 中，$AB>AC$，它的内切圆切边 BC 于点 E，连接 AE 交内切圆于点 D（不同于点 E）．在线段 AE 上取异于点 E 的一点 F，使得 $CE=CF$，连接 CF 并延长，交 BD 于点 G．求证：$CF=FG$．

证法一

证明 如图，过点 D 作内切圆的切线 MNK，分别交 AB,AC,BC 于点 M,N,K．



由 $\angle KDE=\angle AEK=\angle EFG$，得 $MK\parallel CG$．
由牛顿定理知，BN,CM,DE 三线共点．
由塞瓦定理，得 $\dfrac{BE}{EC}\cdot\dfrac{CN}{NA}\cdot\dfrac{AM}{MB}=1$；由梅涅劳斯定理，得 $\dfrac{BK}{KC}\cdot\dfrac{CN}{NA}\cdot\dfrac{AM}{MB}=1$．
两式相除，得 $BE\cdot KC=EC\cdot BK$．
又由梅涅劳斯定理，得 $1=\dfrac{BE}{EC}\cdot\dfrac{CF}{FG}\cdot\dfrac{GD}{DB}=\dfrac{BE}{EC}\cdot\dfrac{CF}{FG}\cdot\dfrac{KC}{BK}=\dfrac{CF}{FG}$，所以 $CF=FG$．

恩次方根

证法二（网友 beyond）

