2023 年西班牙数学奥林匹克

2023-03-14　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_bc6fa976b3ed78a9

第一天

一个 $3\times3\times3$ 的正方体中由 27 个小正方体组成，每个小正方体内部都由一盏灯，每盏灯只有“开”和“关”两种状态．除最中心小正方体外，其余小正方体内都有一个开关．每次按动开关，将改变与开关所在小正方体有公共面的所有小正方体（包含自身）内灯的状态．起初所有的灯都是关闭的．确定以下哪些状态是可以实现的：

(1) 所有灯都开着．

(2) 除中央灯外，所有灯都开着．

(3) 只有中央灯开着．

设锐角 $\triangle ABC$ 的内心为 I，垂心为 H．点 M 为 AB 的中点，在直线 AH 上取点 D、E，使得直线 MD 平行于 CI，直线 ME 垂直于 CI．求证：$AE=DH$．

求所有四元正整数组 (a,b,c,d)，使得 $a^2+b^2=c^2+d^2$，且 $ac+bd$ 整除 a^2+b^2．

第二天

设实数 $x_1\le x_2\le x_3\le x_4$．求证：当且仅当 $x_1+x_4=x_2+x_3$ 时，存在实系数二次多项式 $P(x)$ 和 $Q(x)$，使得 x_1,x_2,x_3,x_4 为 $P(Q(x))$ 的四个根．

203 个格子排成一排，起初，最左边的格子内放有 203 枚硬币，其余格子内都是空的．在每次操作中，能进行下面两种移动方式之一：

(1) 取出一枚硬币，将它移入相邻的格子内（左或右）；

(2) 从同一个格子中恰取出 20 枚硬币，将它们全部放入同一个相邻的格子内（全部左或全部右）．

在 2023 次操作后，每个格子中恰好有一枚硬币．求证：存在一枚硬币，其至少向左移动了 9 次．

在不等边的锐角 $\triangle ABC$ 中，内心为 I，直线 AI 与外接圆的另一个交点为 D．点 J 为 I 关于 D 的对称点．过 I、J 分别作 AI 的垂线，交直线 BC 于点 E、F．设 I 在 AE 上的射影为 G，J 在 AF 上的射影为 H．求证：$BG=CH$．