Mathematical Reflections 2021 年第三期征解题

2021-05-21 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_bc8934010a86f932

初级组

J553. 求方程

$$\left(x^2-2\sqrt{2}x\right)\left(x^2-2\right)=2021$$

的实数解.

J554. 正实数 x，y，z 满足 $x+y+z=xyz$. 求证：

$$\sum_{cyc}\frac{1}{1+x^2}\geq\sum_{cyc}\frac{1}{1+xy}.$$

J555. 实数 a，b，c 满足

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a+2+\sqrt{a^2+8}}\leq\frac{1}{2}.$$

求证：$a+b+c\geq 3$，并说明等号何时成立.

J556. $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ，外心为 O. 过点 B 和点 C 作 Γ 的切线交于点 D，AD 交 Γ 于点 E. 过 A 作 BC 的平行线交 Γ 于点 F. 求证：EF 平分边 BC.

J557. 平行四边形 $ABCD$ 中，$AB\neq AB$ 且 $\angle BAD\geq 90^\circ$. 记 M，N，P 分别为 A 在 BC，CD，BD 上的射影. O 为对角线 AC 和 BD 的交点. 求证：M，N，O，P 四点共圆.

J558. 在凸五边形 $ABCD$ 中，$BC=CD$，$DE=EA$，$\angle BCD+\angle DEA=90^\circ$. 已知 $\angle BCD=\alpha$，$EC=a$，求五边形的面积.

高级组

S553. 求方程

$$\left(x^3-3x\right)^2+\left(x^2-2\right)^2=4$$

的实数解.

S554. 正实数 a，b，c，x，y，z 满足

$$\sum_{cyc}\frac{x}{b^2+c^2+x}\geq 1$$

求证:

$$ab+bc+ca\geq x+y+z.$$

S555. $\triangle ABC$ 为不等边三角形. 在 $\triangle ABC$ 外部分别构造等腰三角形 $\triangle XAB$, $\triangle YAC$, $\triangle ZBC$, 使得 $\angle AXB=\angle AYC=90^\circ$, $\angle ZBC=\angle ZCB=\angle BAC$. 已知 BY, CX, AZ 三线共点, 求 $\angle BAC$.

S556. 正实数 a, b, c 满足 $a+b\leq 3c$. 求

$$\left(\frac{a}{6b+c}+\frac{a}{b+6c}\right)\left(\frac{b}{6c+a}+\frac{b}{c+6a}\right)$$

的最大值.

S557. 正实数 a, b, c 满足 $ab+bc+ca=3$. 求证:

$$\sum_{cyc}\frac{8a^2}{b+c+2}+33\geq 13(a+b+c).$$

S558. $\triangle ABC$ 为不等边三角形, N 为其九点圆圆心. A 关于 N 的对称点 A_1 落在 $\triangle ABC$ 的外接圆上, 求 $\angle BAC$.

大学组

U553. 设 A 为一个 $n\times n$ 矩阵, 且满足 $A^4=I_n$. 求证: $A^2+(A+I_n)^2$ 和 $A^2+(A-I_n)^2$ 互为逆矩阵.

U554. 计算

$$\int_a^b\left\{\frac{x^2+1}{x^2-x+1}\right\}dx$$

其中 $a<0<b$, $\{t\}$ 表示 t 的小数部分.

U555. 设 $f:[0,+\infty)\to[0,\infty)$ 为一个可微函数, 且对所有 $x\geq 0$ 都有 $f(x)e^{f(x)}=x$. 求

$$\int_0^e f(x)dx.$$

U556. 求单位正方体绕其体对角线旋转一周所得几何体的体积.

U557. 计算

$$\int_2^3 xe^x(\ln x+1)dx.$$

U558. 对任意多项式

$$P(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n,$$

定义其互反多项式 $\widetilde{P}(x)$ 为

$$\widetilde{P}(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_n.$$

设整系数多项式 $f(x)=a_rx^{d_r}+\cdots+a_0x^{d_0}$ 满足 $n=d_r>d_{r-1}>\cdots>d_0=0$. 正整系数多项式 $g(x)=b_sx^{e_s}+\cdots+b_0x^{e_0}$ 满足 $n=e_s>e_{s-1}>\cdots>e_0=0$. 求证：若 $f(x)\widetilde{f}(x)=g(x)\widetilde{g}(x)$ 且 $a_0=a_1=\cdots=a_r=1$，则 $r=s$ 且 $b_0=b_1=\cdots=b_s=1$.

奥林匹克问题

O553. $\triangle ABC$ 满足 $AB=AC$，M 为 BC 的中点. 圆 ω 和 BC 相切于 M 且在 $\triangle ABC$ 的外部. 过点 A 的圆 Ω 和 ω 内切，且圆心在 AM 上. 圆 γ 和 Ω 内切，且和线段 BC 及 AC 的延长线相切. 过点 A 作 ω，γ 的切线，分别和线段 MC 交于 K，L 两点. 求证：$\triangle ABL$ 内切圆半径为 $\triangle AKC$ 内切圆半径的两倍.

O554. 实数 a,b,c,d 满足 $|a|,|b|,|c|,|d|\geq 1$，且

$$a+b+c+d+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=0.$$

求证：

$$a+b+c+d\leq 2\sqrt{2}.$$

O555. 正方形 $ABCD$ 的边长为 1. 点 X 在 $ABCD$ 外接圆的劣弧 DA 上. 设 r_1，r_2，r_3，r_4 分别为 $\triangle XDA$，$\triangle XAB$，$\triangle XBC$，$\triangle XCD$ 的内切圆半径. 求 X 在劣弧 DA 上运动的过程中，

$$\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_4}$$

的所有可能值.

O556. 设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a，b，c. 求证：

$$\sum_{cyc}(a^2-bc)\cos\frac{B-C}{2}\geq 0.$$

O557. 求

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{r}.$$

O557. 记 $\{x\}$ 为实数 x 的小数部分. 求证对于任意正整数 n, 存在互不相同的有理数 $x_1, \cdots, x_n > n$，使得对于任意 $1 \leq i, j \leq n$，都有 $\{x_i x_j\} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right)$.