一道计数小题的分析

2021-08-14 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_bd341e4f668ee973

2021 年北京大学优秀中学生暑假学堂数学测试的第一题如下：

> 求集合 $\{1,2,\cdots,2021\}$ 的非空子集中元素和为 3 的倍数的集合个数.

这是一道很陈的题了，例如 2013 年的一道天津高联预赛题就几乎一样：

> 如果集合 $\{1,2,\cdots,9\}$ 的某个非空子集中所有元素之和是 3 的倍数，则称该子集为忐忑子集，那么，忐忑子集的个数是 _____.

这类问题一般能够使用生成函数进行求解.

考虑多项式

$$f(x)=(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2021})$$

我们来研究 $f(x)$ 展开式的组合意义.

事实上，$f(x)$ 展开式中每一项的次数均是由若干个不同的 x^i 相乘产生的，从而 x^n 的系数就是和为 n 的子集个数.

于是在本题中，我们只需求 $f(x)$ 的展开式中，次数为 3 的倍数的所有项的系数之和. 容易联想到一类初中的多项式题目 (以下题为例)：

> 已知 $(3x-1)^5=\sum\limits_{i=0}^{5}a_ix^i$，求 $a_4+a_2+a_0$ 的值.

本题求解关键在于将次数按奇偶分成两组分别求和，于是可以赋值 $x=1$ 和 $x=-1$.

那么回到原题，怎样的赋值能将次数为 3 的倍数的项选取出来呢？容易想到赋值为 1，ω，ω^2(ω 为三次单位根)，解答如下：

设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$. 则

$$f(1)=\sum_{i=0}^{n}a_i=2^{2021}$$

$$\begin{aligned}f(\omega)=&\sum_{3|i}a_i+\omega\sum_{3|i-1}a_i+\omega^2\sum_{3|i-2}a_i\\=&2^{673}(1+\omega)^{674}(1+\omega^2)^{674}\\=&2^{673}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\omega^2) =& \sum_{3|i} a_i + \omega \sum_{3|i-2} a_i + \omega^2 \sum_{3|i-1} a_i \\ =& 2^{673}(1+\omega)^{674}(1+\omega^2)^{674} \\ =& 2^{673} \end{aligned}$$

三式相加，结合 $1+\omega+\omega^2=0$ 得：

$$3\sum_{3|i} a_i = 2^{2021} + 2^{673} + 2^{673}$$

即

$$\sum_{3|i} a_i = \frac{2^{2021}+2^{674}}{3}$$

注意到本题要求的为非空子集个数，故答案为：

$$\frac{2^{2021}+2^{674}}{3} - 1.$$