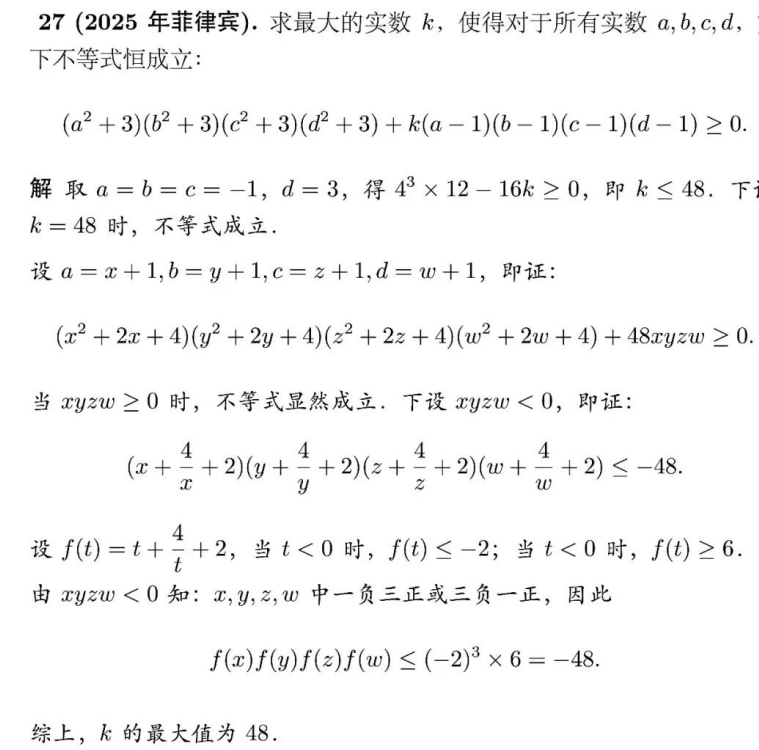
一分钟做不等式系列（8）——2025 年菲律宾 MO

2025-04-09　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_bd3f9211b206f945

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读；下方附本站人工转写的文字版，只作阅读与检索之用，若与原图有出入，以公众号原文为准。



27 (2025 年菲律宾). 求最大的实数 k，使得对于所有实数 a,b,c,d，如下不等式恒成立：

$$(a^2+3)(b^2+3)(c^2+3)(d^2+3)+k(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)\geq 0.$$

解 取 $a=b=c=-1$，$d=3$，得 $4^3\times 12-16k\geq 0$，即 $k\leq 48$. 下证：$k=48$ 时，不等式成立.

设 $a=x+1,b=y+1,c=z+1,d=w+1$，即证：

$$(x^2+2x+4)(y^2+2y+4)(z^2+2z+4)(w^2+2w+4)+48xyzw\geq 0.$$

当 $xyzw\geq 0$ 时，不等式显然成立. 下设 $xyzw<0$，即证：

$$(x+\frac{4}{x}+2)(y+\frac{4}{y}+2)(z+\frac{4}{z}+2)(w+\frac{4}{w}+2)\leq -48.$$

设 $f(t)=t+\frac{4}{t}+2$，当 $t<0$ 时，$f(t)\leq -2$；当 $t<0$ 时，$f(t)\geq 6$.

由 $xyzw<0$ 知：x,y,z,w 中一负三正或三负一正，因此

$$f(x)f(y)f(z)f(w)\leq (-2)^3\times 6=-48.$$

综上，k 的最大值为 48.

本站人工转写（文字版）

下面这段文字由本站对照上方图片逐条录入，公式写成可读的记号，只为方便检索与读屏；它不是公众号原文的一部分，如与图片或原文有出入，请以原文为准。

1. 第 27 题（2025 年菲律宾）　求最大的实数 k，使得对于所有实数 a,b,c,d，如下不等式恒成立：$(a^2+3)(b^2+3)(c^2+3)(d^2+3)+k(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)\ge 0$.
2. 解　取 $a=b=c=-1$，$d=3$，得 $4^3\times 12-16k\ge 0$，即 $k\le 48$. 下证：$k=48$ 时，不等式成立.
3. 设 $a=x+1,b=y+1,c=z+1,d=w+1$，即证：$(x^2+2x+4)(y^2+2y+4)(z^2+2z+4)(w^2+2w+4)+48xyzw\ge 0$.
4. 当 $xyzw\ge 0$ 时，不等式显然成立. 下设 $xyzw<0$，即证：$\Bigl(x+\frac{4}{x}+2\Bigr)\Bigl(y+\frac{4}{y}+2\Bigr)\Bigl(z+\frac{4}{z}+2\Bigr)\Bigl(w+\frac{4}{w}+2\Bigr)\le -48$.
5. 设 $f(t)=t+\frac{4}{t}+2$，当 $t<0$ 时，$f(t)\le -2$；当 $t>0$ 时，$f(t)\ge 6$. 由 $xyzw<0$ 知：x,y,z,w 中一负三正或三负一正，因此

6. $f(x)f(y)f(z)f(w)\le(-2)^3\times 6=-48$.
7. 综上，k 的最大值为 48.