2023 年以色列纪念 Grosman 数学竞赛

2023-10-25 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_bdbba550c5bd1331

Grosman MO 始于 1961 年，由 Grosman 教授举办，由 6-7 个问题组成，是以色列的两个数学竞赛之一。(另一个是以色列 MO，始于 1969 年)

2023 年以色列纪念 Grosman 数学竞赛

程国根　译

1. 已知 10 个自然数成等差数列，且公差为 11．求证：它们的乘积能被 10! 整除．

2. 将 $1,2,\cdots,mn$ 填入一个 n 行 m 列的方格表中，使得每一行从左到右、每一列从上到下中的数字都是递增的．至少要给定多少个方格中的数字，才能使剩余方格中数字的填法是唯一的?

3. 求所有复系数多项式 p,q，使得

$$p(x)\cdot q(x)=p(q(x)).$$

4. 设 q 为奇素数．求证：以下 $q-1$ 个数均无法表示为两个素数（可相同）之积：

$$1^2+1+q,2^2+2+q,\cdots,(q-1)^2+(q-1)+q$$

5. 数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_0=4$，且对任意 $n\geq 0$，都有 $a_{n+1}=\dfrac{a_n(a_n-1)}{2}$．数列 $\{b_n\}$ 满足：若 a_n 为偶数，则 $b_n=0$；若 a_n 为奇数，则 $b_n=1$．求证：对任意自然数 m，数列 $b_m,b_{m+1},b_{m+2},\cdots$ 不为周期数列．

6. 亚当和夏娃玩一个猜数字游戏．亚当在心里想一个自然数 x，每一次夏娃可以任选一个自然数 n，并问 $x+n$ 是否为素数．求证：夏娃可以在问有限个问题之后猜出 x 的值．

7. 将平面上的所有点进行二染色，满足条件：对任意实数 $a>0$，存在一个边长为 a 的正三角形，它的三个顶点是同色的．
求证：对任意实数 $a,b,c>0$，都存在一个三边长分别为 a,b,c 的三角形，它的三个顶点是同色的．

1

2023 年以色列纪念 Grosman 数学竞赛

程国根　译

1. 已知 10个自然数成等差数列，且公差为 11．求证：它们的乘积能被 $10!$整除．

2. 将 $1,2,\cdots,mn$填入一个 n行 m列的方格表中，使得每一行从左到右、每一列从上到下中的数字都是递增的．至少要给定多少个方格中的数字，才能使剩余方格中数字的填法是唯一的?

3. 求所有复系数多项式 p,q，使得 $$p(x)\cdot q(x)=p(q(x)).$$

4. 设 q为奇素数. 求证：以下 $q-1$个数均无法表示为两个素数（可相同）之积：$$1^{2}+1+q,2^{2}+2+q,\cdots,(q-1)^{2}+(q-1)+q$$

5. 数列 $\{a_{n}\}$满足：$a_{0}=4$，且对任意 $n\ge 0$，都有 $a_{n+1}=\frac{a_{n}(a_{n}-1)}{2}$. 数列 $\{b_{n}\}$满足：若 a_{n}为偶数，则 $b_{n}=0$；若 a_{n}为奇数，则 $b_{n}=1$. 求证：对任意自然数 m，数列 $b_{m},b_{m+1},b_{m+2},\cdots$不为周期数列.

6. 亚当和夏娃玩一个猜数字游戏. 亚当在心里想一个自然数 x，每一次夏娃可以任选一个自然数 n，并问 $x+n$是否为素数. 求证：夏娃可以在问有限个问题之后猜出 x的值.

7. 将平面上的所有点进行二染色，满足条件：对任意实数 $a>0$，存在一个边长为 a的正三角形，它的三个顶点是同色的. 求证：对任意实数 $a,b,c>0$，都存在一个三边长分别为 a,b,c的三角形，它的三个顶点是同色的.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2023年以色列纪念Grosman数学竞赛}\flushright 程国根\quad 译\ex 已知$10$个自然数成等差数列，且公差为$11$. 求证：
↪ 它们的乘积能被$10!$整除. \vfill\ex 将$1,2,\cdots,mn$填入一个$n$行$m$列的方格表中，使得每一行从左到右、
↪ 每一列从上到下中的数字都是递增的. 至少要给定多少个方格中的数字，才能使剩余方格中数字的填法是唯一的？\vfill\ex
↪ 求所有复系数多项式$p,q$，使得$$p(x)\cdot q(x)=p(q(x)).$$\vfill\ex 设$q$为奇素数. 求证：
↪ 以下$q-1$个数均无法表示为两个素数（可相同）之积：$$1^{2}+1+q,2^{2}+2+q,\cdots,(q-1)^{2}+(q-1)+q$$\vfill\ex
↪ 数列$\{a_{n}\}$满足：$a_{0}=4$，且对任意$n\ge 0$，都有$a_{n+1}=\frac{a_{n}(a_{n}-1)}{2}$. 数列$\{b_{n}\}$满足：
↪ 若$a_{n}$为偶数，则$b_{n}=0$；若$a_{n}$为奇数，则$b_{n}=1$. 求证：对任意自然数$m$，
↪ 数列$b_{m},b_{m+1},b_{m+2},\cdots$不为周期数列. \vfill\ex 亚当和夏娃玩一个猜数字游戏. 亚当在心里想一个自然数$x$，
↪ 每一次夏娃可以任选一个自然数$n$，并问$x+n$是否为素数. 求证：夏娃可以在问有限个问题之后猜出$x$的值. \vfill\ex
↪ 将平面上的所有点进行二染色，满足条件：对任意实数$a>0$，存在一个边长为$a$的正三角形，它的三个顶点是同色的.
求证：对任意实数 $a,b,c>0$，都存在一个三边长分别为 $a,b,c$ 的三角形，它的三个顶点是同色的. \vfill
```