2021 年北京市中学生数学竞赛高一年级试题

2021-05-18　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_be8ccdff3fe326fe

来源:【全网首发】2021 高一数学竞赛全卷详解

2021 年北京市中学生数学竞赛高一年级试题

2021 年 5 月 16 日 8 : 30~10 : 30

一、填空题（满分 40 分，每小题 8 分）

1. 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. 已知 $A\bigcap B=\varnothing$，则 B 有 _____ 种可能.
2. 向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{c}$ 满足 $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}\neq\overrightarrow{0}$，$(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a})\cdot(\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b})=0$. 则 $\dfrac{|\overrightarrow{c}|}{|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|+|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|}$ 的最大值为 _____.
3. 方程 $x^2-4|x|+5=k$（$k\in\mathbb{R}$）恰有四个不等实根，则 k 的取值范围为 _____.
4. 在正 $\triangle ABC$ 中，AM 为 BC 边上的高. 点 P、Q 分别从 A、C 出发，沿 AM、CA 以相同的速度匀速运动. 当 $PB+QB$ 取最小值时，$\angle PBQ$ 的值为 _____.
5. 已知 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 的定义域为 $\{1,2,3,4,5\}$，值域包含于 $\{1,2,3,4\}$. 若 $f(3)$ 被 $f(5)$ 整除，则函数 f 共有 _____ 种不同的情况.

二、（满分 15 分）记 $m=7997\times7999^3-7998\times7996^3$，求 $\sqrt[3]{m}$.

三、（满分 15 分）已知 $p(p>5)$ 为质数，去掉 $\dfrac{1}{p}$ 小数点后的第 2020 位数字，得到 $\dfrac{a}{b}$（a 与 b 为互质的正整数. 求证：$p\mid b$.

四、（满分 15 分）G 为正 $\triangle ABC$ 的重心，P 为形内任意一点. 记 $AB=a$，$GP=d$，又以 PA、PB、PC 为边的三角形面积为 S. 求证：$S=\dfrac{\sqrt{3}}{12}(a^2-3d^2)$.

五、（满分 15 分）函数 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)+4xy$，$f(-1)\cdot f(1)\geq4$. 求 $f(x)$.