一道原创代数题及解答

2026-08-12　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_bf4d78655b5ae365

命题灵感来自 $n\times n$ 棋盘上 n 个互不攻击的车及其位置. 原计划用于命题研讨会投稿，但一直怀疑已有类似问题，遂暂时搁置.

今天用 GPT 再次检索，仍未发现更早出处，故将题目及解答整理发出.

本题难度约为联赛二.

题目

给定正整数 n，设 σ 为 $1,2,\dots,n$ 的任意一个置换. 求

$f(n)=\sum_{k=1}^{m}\sigma(k)+\sum_{k=m+1}^{n}\sigma^{-1}(k)$

的最小值，其中 $m=\left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$，$\sigma^{-1}(k)$ 表示 k 的原像.

解答（PDF 中已展开）

解答

证明

称 $1,2,\dots,m$ 称为 “小数”，$m+1,m+2,\dots,n$ 称为 “大数”.

设在 $\sigma(1),\cdots,\sigma(m)$ 中，恰有 x 个大数，于是其中 $m-x$ 个小数之和至少为

$1+2+\cdots+(m-x)$,

而 x 个大数之和至少为

$(m+1)+(m+2)+\cdots+(m+x)$.

因此

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{m}\sigma(k)\\ \geq&1+2+\cdots+(m-x)\\ &+(m+1)+(m+2)+\cdots+(m+x)\\ =&\frac{(m-x)(m-x+1)}{2}+\frac{x(2m+x+1)}{2}.\end{aligned}$$

$\sum_{k=m+1}^{n}\sigma^{-1}(k)$ 是所有大数所在位置的编号之和，其中恰有 x 个大数位于前 m 个位置，故这 x 个位置编号之和至少为

$1+2+\cdots+x$.

其余 $n-m-x$ 个大数位于后面的 $n-m$ 个位置，它们的位置编号之和至少为

$(m+1)+(m+2)+\cdots+(n-x)$.

故

$$\begin{aligned}&\sum_{k=m+1}^{n}\sigma^{-1}(k)\\ \geq&1+2+\cdots+x\\ &+(m+1)+(m+2)+\cdots+(n-x)\\ =&\frac{x(x+1)}{2}+\frac{(n-m-x)(m+1+n-x)}{2}.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}f(n)\geq&\frac{(m-x)(m-x+1)}{2}+\frac{x(2m+x+1)}{2}\\ &+\frac{x(x+1)}{2}+\frac{(n-m-x)(m+1+n-x)}{2}\\ =&2x^2-nx+\frac{n(n+1)}{2}\\ =&2\left(x-\frac{n}{4}\right)^2+\frac{3n^2+4n}{8}.\end{aligned}$$

由 $f(n)$ 为整数知

$f(n)\geq\left\lceil\frac{3n^2+4n}{8}\right\rceil$.

取等的构造

由于 x 为整数，所以右端在 x 取最接近 $n/4$ 的整数时最小.

具体地:

- 若 $n=4r$，取 $x=r$;
- 若 $n=4r+1$，取 $x=r$;
- 若 $n=4r+2$，取 $x=r$ 或 $x=r+1$;
- 若 $n=4r+3$，取 $x=r+1$.

置换 σ 的构造如下:

位置	放置的数
$1,2,\ldots,x$	$m+1,m+2,\ldots,m+x$
$x+1,x+2,\ldots,m$	$1,2,\ldots,m-x$
$m+1,m+2,\ldots,n-x$	$m+x+1,m+x+2,\ldots,n$
$n-x+1,n-x+2,\ldots,n$	$m-x+1,m-x+2,\ldots,m$

答案

容易验证上述构造满足要求，因此所求最小值为

$$\boxed{\min f(n)=\left\lceil\frac{3n^2+4n}{8}\right\rceil}.$$

注

一、答案数列

本题答案数列恰为 OEIS A282513，但暂未发现两者关联，感兴趣的读者可以尝试一下.

二、另解

将 σ 分解为若干个不交的置换.

将 $\sigma(x)=y$ 按照 x,y 是大数/小数的关系分成四类，计算每一类在 f 中的贡献.

进行调整，直到只剩下长度为 4 的置换 (a,a,b,b) 和不动点.