Mathematical Reflection 2021 年第二期征解题

2021-04-16 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_bfb0148ad6ab5699

初级组

J547. 求所有素数 p 使得

$$\frac{2^{p+2}-1}{p}$$

也为一个素数.

J548. a，b，c，x，y 均为正实数，且 $x+y=1$. 求证：

$$\begin{aligned}&\sqrt{\frac{a^3}{xa+yb}}+\sqrt{\frac{b^3}{xb+yc}}+\sqrt{\frac{c^3}{xc+ya}}\\ \geq&a+b+c\end{aligned}$$

J549. a，b，c 为正实数. 求证：

$$\begin{aligned}&\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}-\frac{9}{a+b+c}\\ \geq&\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\end{aligned}$$

J550. a，b，c 为实数，且 $a\leq c$，$b\leq c$，$abc=1$，$ab+bc+ca=0$. 求最大的实数 k，使得

$$|a+b|\geq k|c|.$$

J551. M 为正方形 $ABCD$ 的边 CD 上一点. AM 和 BD 交于点 E. 过点 E 作 AM 的垂线，交 BC 于点 N. AN 交 BD 于点 F，EN 交 FM 于点 K. 求证：AK 和 MN 垂直.

J552. x，y，z 为正实数，且

$$xy+yz+zx+xyz=4.$$

求证：

$$\begin{aligned}&2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}\right)\\ \leq&3\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}\right)\\ \leq&3\sqrt{(x+1)(y+1)(z+1)}\end{aligned}$$

高级组

S547. a 和 b 为小于 2 的正实数，且 $ab=2$. 求关于 x 的方程

$$4(x^2+ax+b)(x^2+bx+a)+a^3+b^3=9$$

的实数解.

S548. 非负实数 a，b，c，d 满足 $a+b+c+d=10$. 求证：

$$6a+2ab+abc+abcd\leq 96$$

S549. 正实数 a，b，c 满足

$$a+b+c+abc=4.$$

求证：

$$\begin{aligned}&a\sqrt{bc}+b\sqrt{ca}+c\sqrt{ab}\\\leq&\sqrt{1+4a-a^2}+\sqrt{1+4b-b^2}+\sqrt{1+4c-c^2}\\\leq&ab+bc+ca+3\end{aligned}$$

S550. a，b，c 为正实数. 求证：

$$\begin{aligned}&\sqrt{a^2+2ab}+\sqrt{b^2+2bc}+\sqrt{c^2+2ca}\\\geq&\sqrt{3ab}+\sqrt{3bc}+\sqrt{3ca}\end{aligned}$$

S551. $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a，b，c，内切圆半径为 r，外接圆半径为 R. 求证：

$$\frac{R}{r}+(1+\sqrt{5})\geq(3+\sqrt{5})\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

并指出等号何时成立.

S552. 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=8$. 已知在 $\triangle ABC$ 内部存在一点 P，满足：$PB=5$；PC，AC，BC 成等差数列，公差为 2；$\angle BPC=2\angle BAC$. 求满足上述条件的所有 $\triangle ABC$.

大学组

U547. a，b，c，d 为实数，且方程

$$x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+1022=0$$

的所有根均为不大于 -1 的实数. 求证:

$$a+c<b+d.$$

U548. 已知 n 为正整数，计算

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^n x}.$$

U549. 计算:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{n^2(2n-1)^2}.$$

U550. 设

$$f_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x^{2^k}-x^{2^{k-1}}+1)$$

求证：对于任意 $|x|<1$，均有

$$\frac{1}{3}<\lim_{n\to\infty}f_n(x)\le\frac{4}{3}.$$

U551. 设正系数多项式

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_dx^d$$

的系数满足 $a_k^2>9a_{k-1}a_{k+1}$，其中 $k=1,\cdots,d-1$. 求证 $P(x)$ 有 d 个不同的实根.

U552. 求所有实系数多项式 $P(x)$，满足

$$\begin{aligned}&P(P(a+b))-4abP(a+b)+4a^2b^2\\\ge&P(a^2)+P(b^2)\\\ge&P(a^2+b^2)-P(\sqrt{2}ab)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P(P(a+b))-4abP(a+b)+4a^2b^2\\\ge&P(a^2)+P(b^2)\\\ge&P(a^2+b^2)-P(\sqrt{2}ab)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P(P(a+b))-4abP(a+b)+4a^2b^2\\\geq&P(a^2)+P(b^2)\\\geq&P(a^2+b^2)-P(\sqrt{2}ab)\end{aligned}$$

O547. $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a，b，c，内切圆半径为 r，外接圆半径为 R. 求证：

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{c+a}\right)^2+\left(\frac{c}{a+b}\right)^2+\frac{17r}{18R}\geq\frac{11}{9}$$

O548. $m,n,p\geq 2$ 为正整数. 求由 $\{1,2,\cdots,m\}$ 中的元素构成的 $n\times p$ 矩阵的数目，满足矩阵中的每个元素与其所在行、列的相邻元素不同.

O549. $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r，外接圆半径为 R. 求证：

$$\begin{aligned}&\frac{\cos A}{\sin^2 A}+\frac{\cos B}{\sin^2 B}+\frac{\cos C}{\sin^2 C}\\\geq&\frac{7}{4}\left(\frac{R}{r}+\frac{r}{R}\right)-\frac{19}{8}\\\geq&\frac{1}{16}\left(21\frac{R}{r}-10\right)\\\geq&\frac{R}{r}\end{aligned}$$

O550. 在 $\triangle ABC$ 中，半径为 r 的内切圆与 BC 边切于点 D. 点 X 在 $\angle BAC$ 内部，但在 $\triangle ABC$ 外部，满足：

$$BD\cdot BX=CD\cdot CX$$

及

$$\tan\frac{1}{2}\angle CXB=\frac{r}{BC}$$

求证：点 X 在 A-旁切圆上.

O551. $\triangle ABC$ 的三边长为 a，b，c，半周长为 s，面积为 Δ. 求证：

$$a(s-a)\cos\frac{B-C}{4}+b(s-b)\cos\frac{C-A}{4}+c(s-c)\cos\frac{A-B}{4}\geq 2\sqrt{3}\Delta$$

O552. $\triangle ABC$ 的内心为 I. 内切圆与 BC，CA，AB 的切点分别为 D，E，F. 记 $\triangle AEF$，$\triangle BFD$，$\triangle CDE$ 的垂心分别为 A_1，B_1，C_1. 求证：

(1) $\triangle DB_1C_1$ 的外接圆经过 A 在 BC 边的射影；

(2) $\triangle DB_1C_1$，$\triangle EC_1A_1$，$\triangle FA_1B_1$ 的外接圆过同一点，这点即为 $\triangle ABC$ 的费尔巴哈(Feuerbach)点.

$$
\begin{aligned}
&P(P(a+b))-4abP(a+b)+4a^2b^2\\
\geq&P(a^2)+P(b^2)\\
\geq&P(a^2+b^2)-P(\sqrt{2}ab)
\end{aligned}
$$