2022 年法语数学奥林匹克

2022-05-26 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_bfe9a0f44a4676a1

初级组

1. 求所有正整数 n，使得 $\lfloor\sqrt{n}\rfloor \mid n$.

2. 在一个 $n \times n$ 的表格内，Aya 想要将其中 k 个格子染色，使得恰有唯一的方法在已染色的方格内放置 n 枚棋子，并满足任意两个棋子不在同一行和同一列．求 k 的最大值使得 Aya 能实现自己的想法.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 的角平分线和 AC 的垂直平分线交于点 D．过点 B 作 AC 的平行线和 AD 交于点 X．过点 B 作 CX 的平行线和 AC 交于点 Y．直线 BX 和 $\triangle AYB$ 的外接圆再次相交于点 E．求证：C，D，E 三点共线.

4. 求最小的正整数 n，使得方程

$$a^2 + b^2 + c^2 - nd^2 = 0$$

有唯一解 $(0, 0, 0, 0)$.

高级组

1. 求所有函数 $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，使得对任意 m，$n \in \mathbb{Z}$，都有 $f(m+n) + f(m)f(n) = n^2(f(m) + 1) + m^2(f(n) + 1) + mn(2 - mn)$.

2. 为了连接到 OFM 站点，Alice 必须选择一个密码．密码由如下 27 个字符中的 n 个组成：

$$A, B, C, \cdots, Y, Z, \#$$

称一个密码 m 是冗余的，如果能将密码中的连续若干个字符染成红色和蓝色，使得红色字符与蓝色字符相同．例如：密码 H#ZBZJBJZ 是冗余的，因为它包含 ZBZJBJ 字符段，其中 ZBJ 既出现在红色字符中，又出现在蓝色字符中．而密码 ABCACB 不是冗余的.
求证：对任意正整数 n，存在至少 18^n 个非冗余的长度为 n 的密码（即每个密码都由 n 个字符组成）.

1. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ，Γ 在点 A 处的切线为 Δ．圆 Γ_1 同时和直线 Δ，AB，BC 相切，且和直线 AB 切于点 E．圆 Γ_2 同时和直线 Δ，AC，BC 相切，且和直线 AC 切于点 F．设 E、F 分别在线段 AB、AC 上，两圆 Γ_1、Γ_2 均在 $\triangle ABC$ 外．求证：$EF \parallel BC$.

2. 求所有的整数 $a \geq 2$，$b \geq 2$，使得 a 是偶数，且 $a^b + 1$ 的所有数码均相等.