三道百子遴选考试题目及解答

2021-05-04 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_c0b84e13cc1abbdf

在 5 月 2 日和 5 月 3 日举办的百子遴选考试中，我为 S5，S8 和 S9、10 三个级别各供了一道题. 下面是这三道题目及解答.

本次百子遴选的全部试题见百子菁英计划青少年数学爱好者沙龙（20210502 期）各阶段真题速览.

S5 第 11 题

在晚会上，一些人互相握手. 已知以下信息：
(1) 每个人恰好与 20 个人握手；
(2) 如果两个人握过手，则恰好有 1 个人与他们俩同时握手；
(3) 如果两个人没有握过手，则恰好有 6 个人与他们俩同时握手.
问：参加晚会的共有多少人?

解答（PDF 中已展开）

解答

设共有 N 个人. 考虑三人组 (a_1,a_2,a_3)，其中 a_1 与 a_2、a_3 均握手.（设 a_2、a_3 为无序对）
注意到 (a_1,a_2,a_3) 和 (a_1,a_3,a_2) 是同一个三人组，但和 (a_2,a_1,a_3) 不是同一个三人组.
下面计算这样的三人组的个数.
由于每个人恰好与 20 个人握手，故对于某个确定的 a_1，有 $C_{20}^2=190$ 个这样的三人组.
于是这样的三人组共有 $190N$ 个.
另一方面，全部的 N 个人可以组成 C_N^2 个二人组，将这些二人组分成两类：互相握过手的（设有 x 个）；没有握过手的（设有 y 个）.
于是 $x+y=C_N^2$.
由于每个人恰好与 20 个人握手，故共进行了 $\dfrac{20N}{2}=20N$ 次握手（每次握手被计算两次）.
于是 $x=10N$.
由后两个条件可知，三人组 (a_1,a_2,a_3) 的个数为：（按照 a_2、a_3 是否进行握手分类）

$$\begin{aligned}x+6y=&10N+6\left(C_N^2-10N\right)\\=&3N(N-1)-50N\end{aligned}$$

于是

$$3N(N-1)-50N=190N$$

即 $3(N-1)=240$.
于是 $N=81$，即参加晚会的共有 81 人.

S8 第 9 题

n 为不小于 2 的正整数，求证：

$$\sum_{1\le i<j\le n}\frac{i+2ij+j}{\sqrt{(i+1)(j+1)}}<\frac{n(n^2-1)}{2}.$$

证明

由柯西不等式，$n\ge 2$ 时，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i+1}\right)^2<n\sum_{i=1}^{n}(i+1)=\frac{n^2(n+3)}{2}$$

以及

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{i+1}}\right)\\>&\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{i+1}}\right)^2\\=&n^2\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\sum_{1\le i<j\le n}\frac{i+2ij+j}{\sqrt{(i+1)(j+1)}}\\=&\sum_{1\le i<j\le n}\left(i\sqrt{\frac{j+1}{i+1}}+j\sqrt{\frac{i+1}{j+1}}\right)\\=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i\sqrt{\frac{j+1}{i+1}}-\sum_{k=1}^{n}k\\=&\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{j+1}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{i+1}-\frac{1}{\sqrt{i+1}}\right)\right)-\frac{n(n+1)}{2}\\<&\frac{n^2(n+3)}{2}-n^2-\frac{n(n+1)}{2}\\=&\frac{n(n^2-1)}{2}.\end{aligned}$$

S9、10 第 3 题

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_0$ 的所有系数均为正整数，且次数 $n\ge 2$. 数列 $\{b_n\}$ 满足：$b_1=a_0$，$b_{n+1}=f(b_n)$. 求证：对于任意正整数 $n\ge 2$，存在素数 p 满足 $p\mid b_n$，$p\nmid b_1b_2\cdots b_{n-1}$.

证明

使用反证法. 假设存在一个正整数 $n \geq 2$，使得 b_n 的所有素因子均为 b_1、b_2、$\cdots$、b_{n-1} 之一的素因子. 设 q 为 b_n 的任意一个素因子，$b_n = q^r l$，其中 $\gcd(q, l) = 1$. 于是

$$\begin{aligned} b_{n+1} =& f(b_n) \\ =& a_n \left(q^r l\right)^n + a_{n-1} \left(q^r l\right)^{n-1} + \cdots + a_2 \left(q^r l\right)^2 + a_0 \\ \equiv& a_0 = b_1 (\mathrm{mod}\ q^{r+1}) \end{aligned}$$

接下来，可以用数学归纳法证明：

对于任意正整数 i，都有 $b_{n+i} \equiv b_i (\mathrm{mod}\ q^{r+1})$.
这是由于

$$b_{n+k+1} = f(b_{n+k}) \equiv f(b_k) = b_{k+1} (\mathrm{mod}\ q^{r+1}).$$

于是有

$$b_n \equiv b_{2n} \equiv \cdots \equiv b_{kn} (\mathrm{mod}\ q^{r+1}).$$

记 $v_p(n)$ 为 n 的素因数分解中素数 p 的指数，则 $v_q(b_n) = r$. 因此

$$v_q(b_n) = v_q(b_{2n}) = \cdots = v_q(b_{kn}) = r.$$

由假设知，必存在正整数 i（$1 \leq i \leq n-1$），使得 $q \mid b_i$. 重复上面的过程可以得到：

$$v_q(b_i) = v_q(b_{2i}) = \cdots = v_q(b_{ni})$$

于是有 $v_q(b_i) = v_q(b_{ni}) = v_q(b_n) = r$. 这表明对于 b_n 的所有素因子 q，其在 b_n 中的次数与在 b_1、b_2、$\cdots$、b_{n-1} 之一中的次数相等. 即 $b_n \mid b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$.
于是有 $b_n \leq b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$. 又 $b_n = f(b_{n-1}) < b_{n-1}^2$，即 $b_{n-1} < \sqrt{b_n}$.
因此

$$b_{n-k} < \sqrt{b_{n-k+1}} < \sqrt[4]{b_{n-k+2}} < \cdots < b_n^{\frac{1}{2^k}}.$$

于是

$$0 < b_1 b_2 \cdots b_{n-1} < b_n^{\frac{1}{2^{n-1}}} b_n^{\frac{1}{2^{n-2}}} \cdots b_n^{\frac{1}{2}} < b_n.$$

矛盾!

因此对于任意正整数 $n \geq 2$，存在素数 p 满足 $p \mid b_n$，$p \nmid b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$.