2026 年阿尔 · 花刺子密初中数学竞赛

2026-06-05 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_c0f048fca4c83255

第一天

题 1. 设 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，满足 $AB = AC$. 记 $\triangle ABC$ 的外接圆为 ω，圆心为 O. 设 D 是 ω 上不含点 B 的弧 AC 上任意一点，且异于 A 和 C.
过点 A 作直线 BD 的平行线，交直线 CD 于点 E；过点 A 作直线 CD 的平行线，交直线 BD 于点 F.
证明：点 O、E、F 三点共线.

题 2. 玛丽亚选取四个不一定互不相同的非负实数 x, y, z, t，满足

$$x + y + z + t = 4.$$

随后她将这些数填入下表：

x	y	z
x	y	t
x	z	t
y	z	t

在表格的每一行中，玛丽亚将三个单元格分别涂成蓝色、绿色和红色（每行每种颜色恰好一个），要求：蓝色单元格中的数不大于该行另外两个数，红色单元格中的数不小于该行另外两个数.
设 b, g, r 分别为所有蓝色、绿色、红色单元格中的数之和。求以下表达式的最大可能值：
(i) $\boldsymbol{bg^2r^3}$;
(ii) $\boldsymbol{br}$.

题 3. 某学校有 1000 名学生，每名学生都有若干颗糖果，且所有学生的糖果数恰好是 1 到 1000 之间互不相同的整数.
学生们被分成 500 对，要求每一对中恰好有一名学生的糖果数为偶数，另一名为奇数. 随后在每一对中，糖果数较多的学生将自己一半的糖果分给搭档.
设操作完成后，所有学生中不同糖果数的个数为 N. 求 N 的最小可能值，并找出所有能达到该最小值的配对方式.

题 4. 证明：不存在正整数 a, b，使得

$$3a^4 - 2ab^3 + b^3 - b^2 = 0.$$

第二天

题 5. 设 x, y, z 为整数，满足 $x + y + z = 0$. 证明：

$2\left(|xy|+|yz|+|zx|+|xy+yz+zx|\right)$

是一个完全平方数.

题 6. 设 n 为正合数，其所有正约数按从小到大排列为

$1=d_1<d_2<\cdots<d_k=n.$

假设对任意 $i=2,3,\ldots,k-1$，都满足以下条件：

- 若 d_i 是合数，则 d_{i-1} 整除 d_i；
- 若 d_i 是质数，则 d_{i-1} 整除 d_{i+1}.

求 n 的所有可能值.

题 7. 设 $n\geq 3$ 为整数. 贝赫鲁兹别克在一个正 n 边形的顶点中标记了 k 个顶点. 求最小的 k（用 n 表示），使得无论贝赫鲁兹别克如何选择这 k 个顶点，其中总能找到四个不同的标记顶点，它们恰好是一个箏形的四个顶点.

（四边形 K（不一定是凸四边形）称为**箏形**，若它的某一条对角线的垂直平分线经过 K 的另外两个顶点.）

题 8. 伊姆龙有一辆故障汽车，在一张 2026×2026 的棋盘上行驶. 汽车从格子 C 出发，初始朝向可以是上、下、左、右中的任意一个.

每一步操作中，汽车只能执行以下两种动作之一：
(1) 沿当前朝向向前移动一格；
(2) 先顺时针旋转 90°，再沿新的朝向向前移动一格.

若汽车可以遍历棋盘上的所有格子，且每个格子恰好被访问一次（起始格子 C 视为初始已访问），则称起始格子 C 为**好格子**. 求所有的好格子.