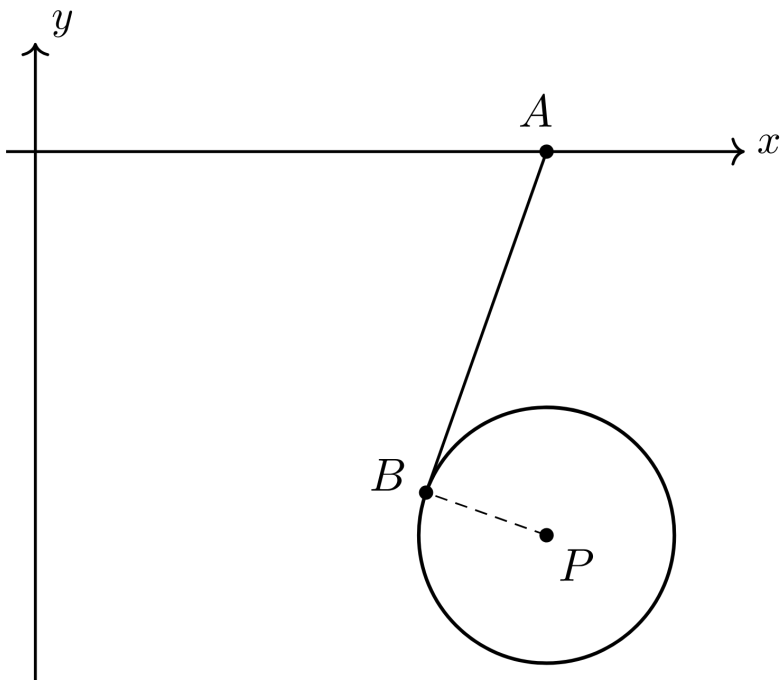
2022 年西交大少年班数学试题（回忆版）

2022-02-19　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_c1171ff34d96b23d

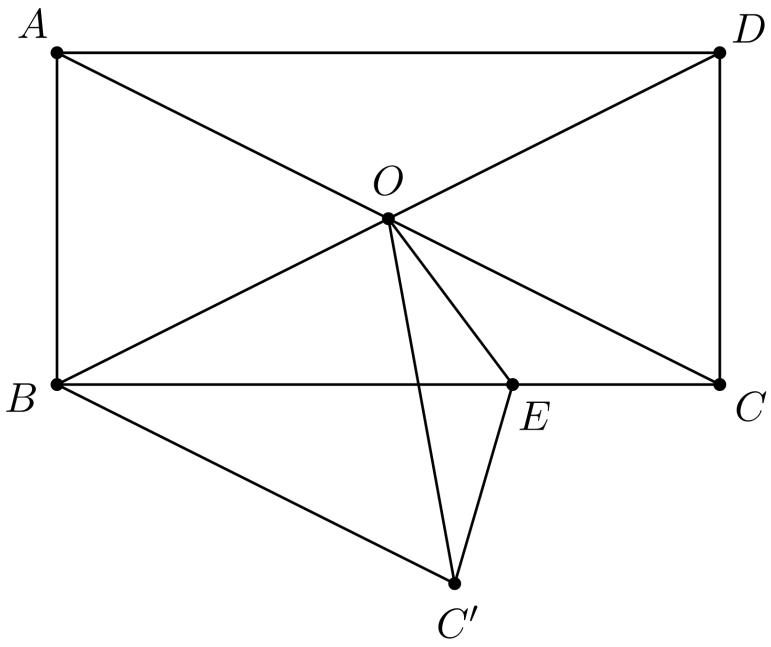
1. 已知 $\frac{1}{x^4}-\frac{1}{x^2}=3$，$y^4+y^2=3$，则 $\frac{1}{x^4}+y^4$ 的值为 _____.

2. 已知点 $P(4,-3)$，A 为 x 轴上的一动点，AB 为切线，已知圆 P 半径为 1，则 AB 的最小值为 _____.



3. $x^2-(a+3)x+4=0$，m，n 为该方程两根．则 $\left(m^2-am+4\right)\left(n^2-an+4\right)$ 的值为 _____.

4. 已知矩形 $ABCD$，$AB=2$，$BC=4$．E 为 BC 上一动点 OC 沿 OE 翻折，当 $\triangle BEC'$ 为直角三角形时，$\triangle BEC'$ 的周长为 _____.

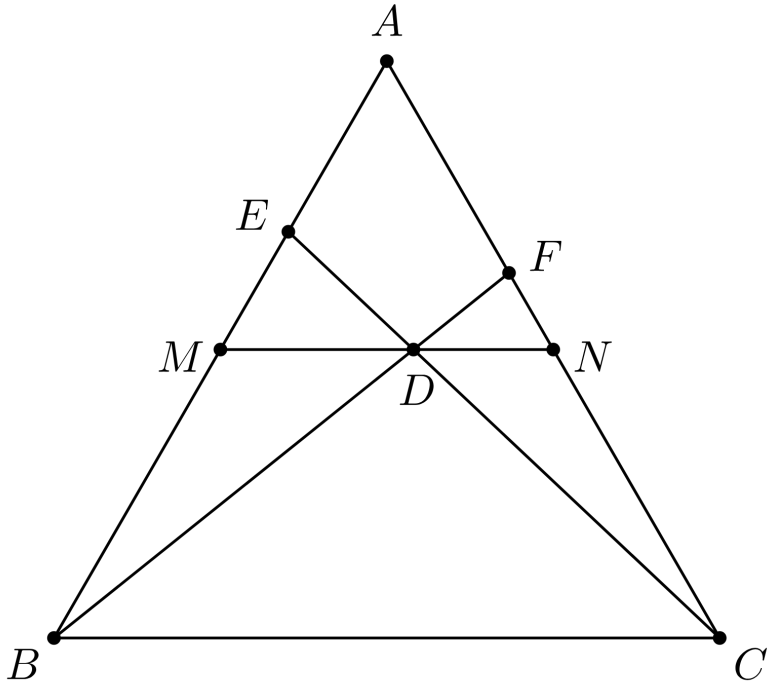


5. A 点有一个无人机，一个人在 B 点观测，离 B 点 45m 处 C 点有一栋建筑物高 $15\sqrt{3}$m，无人机水平向右以 5m/s 的速度飞行.

   (1) 无人机的高度为 _____.

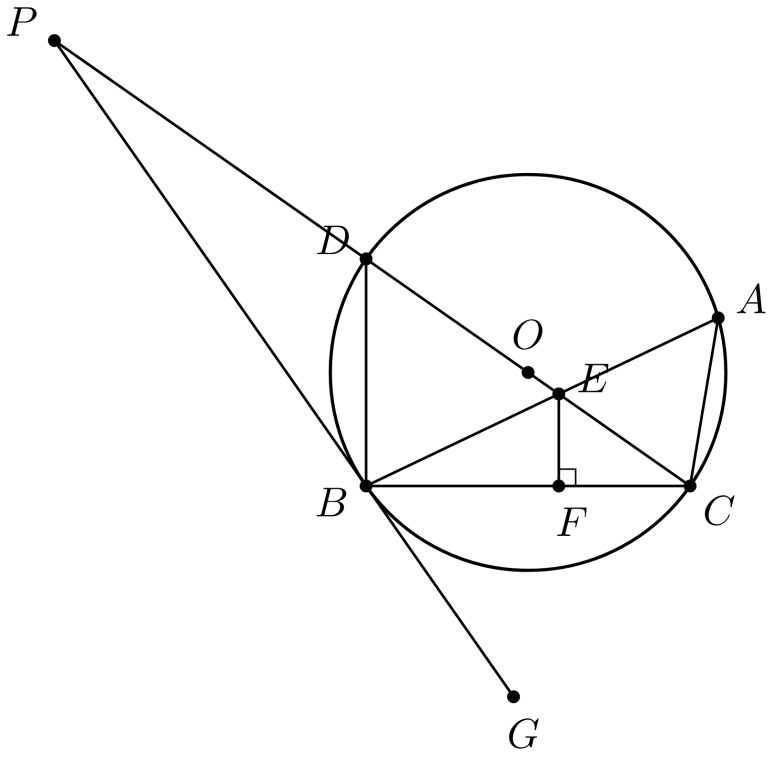
   (2) 无人机离开视线的时间为 _____.

6. $\triangle ABC$ 为等边三角形，M，N 分别为 AB，AC 边的中点，D 为 MN 上任意一点，线段 BD 交 AC 于 F，线段 CD 交 AB 于 E，$\dfrac{1}{CE}+\dfrac{1}{BF}=3$，求 $\triangle ABC$ 的面积.



7. 如图，$\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$，$\angle CBG=\angle A$，CD 为直径，OC 与 AB 相交于点 E，过 E 作 $EF\perp BC$，垂足为 F，延长 CD 交 GB 的延长线于点 P，连接 BD.

(1) 证明：PG 与圆 O 相切；
(2) 若 $\dfrac{EF}{AC}=\dfrac{5}{8}$，求 $\dfrac{BE}{OC}$ 的值；
(3) 在 (2) 的条件下，若圆的半径为 4，$PD=OD$，求 OE 的长.

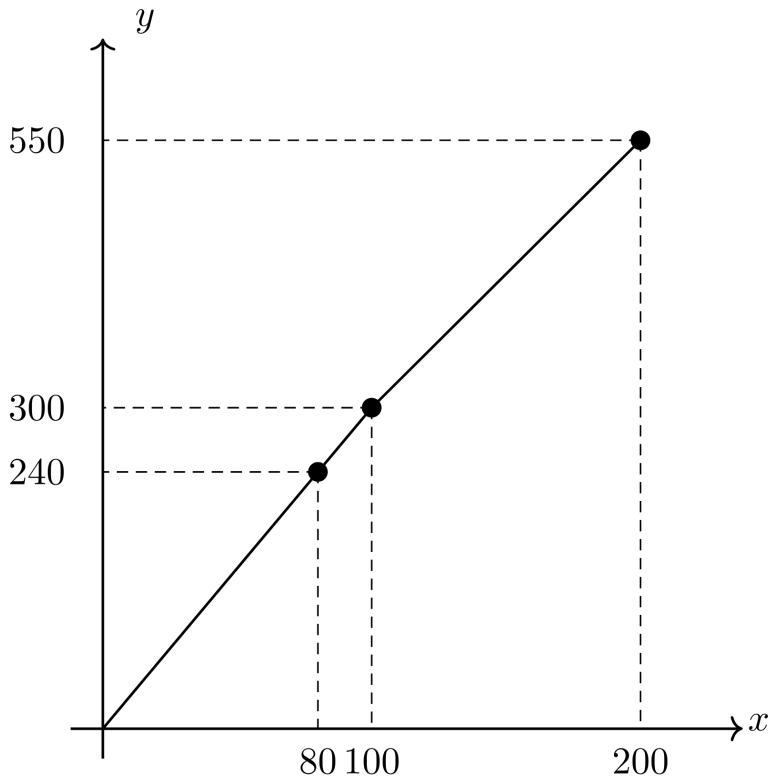


8. 已知函数 $y=mx^2+(1-m)x+1+2m$.
(1) 证明：函数与 x 轴恒有交点；
(2) 证明：无论 m 为何值，函数必过一定点 B；
(3) 设函数图像和 y 轴交点为 A，顶点为 M. 若 $m=-1$，将函数沿 AM 方向平移，和一定点与原顶点所连线段有交点，求平移后顶点横坐标的范围.

9. 某大学生创业，购进 A、B 共 300 件，设 B 的件数 $80\le x\le 200$. A 的单价比 B 的单价多 6 元. 设 A，B 的总售价分别为函数 z_1，z_2.
z_1 与销售件数之间是一次函数的关系，如下表：

销售件数	0	1	2	3	4
总售价	0	10	20	30	40

z_2 与 x 之间的函数关系如图所示：



(1) 直接写出 z_1，z_2 与 x 的函数关系；

(2) 设销售 A，B 两种商品所获利总利润为 y 元，求 y 与 x 之间的函数解析式；

(3) 大学生引进的 300 件 A，B 商品全部售完，共获利 350 元，他计划每件 A，B 商品捐给学校基金分别捐 $2m$ 元，m 元, 捐款数恰好为总成本的 10%，求 m 的值.

10. 对于大于 1 的奇数, 将其平方后拆分成 2 个相邻的整数, 这三个数为勾股数.
如：$3,4,5$；$5,12,13$；$7,24,25\cdots$
对于大于 2 的偶数，将其除以 2 再平方，将平方所得数分别加减 1，这三个数为勾股数，如 $8,15,17$.
则以这种方法，12 所得的勾股数中最大的数为 _____.

11. 证明：对于任意实数 x，y，求证：$[2x]+[2y]\geq[x]+[x+y]+[y]$.

12. 证明：$[x]+\left[x+\dfrac{1}{n}\right]+\left[x+\dfrac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\dfrac{n-1}{n}\right]=[nx]$.