2026 年 IMSC 第 5 题解答

2026-07-06　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_c3a14416a650b8d7

题目

求所有合数 $n(n>1)$，使得对任意正整数 $d<n$，若 $(d,n)>1$，则 $n \mid d^n+(n-d)^{(d,n)}$.

解答（PDF 中已展开）

答案

$$\boxed{n=p^\alpha\ (p\text{ 为素数},\ 2\le\alpha\le p),\quad \text{或}\quad n=pq\ (p,q\text{ 为不同奇素数})}$$

分析

本题的关键在于按素因子取模，并设法控制指数 (d,n). 若 n 有两个不同素因子 p,q，可取 $d=pa$，使得 $(d,n)=p$. 此时题设中的指数被固定为 p，再模 q^β（其中 $q^\beta \parallel n$）观察，由 $n-d\equiv -d$ 可得到 $d^{n-p}\equiv 1 \pmod{q^\beta}$.

当 a 变化时，$d=pa$ 会遍历模 q^β 的约系，因此模 q^β 的约系中每个元素都满足同一个幂同余. 这个限制非常强：若 $\beta\ge 2$，取 $x=1+q$，由二项式展开便会推出 $q\mid n-p$，与 $q\mid n$ 且 $q\nmid p$ 矛盾. 所以多素因子情形下，n 必无平方因子.

进一步，在模 q 下取原根可得 $q-1\mid n-p$. 若 n 有三个不同奇素因子，取最大的为 q，再取另外两个素因子 p_1,p_2，即可推出 $q-1\mid p_2-p_1$，与 $0<|p_2-p_1|<q-1$ 矛盾. 故多素因子情形只可能是两个不同奇素数的乘积.

单素因子情形则令 $n=p^\alpha$，取 $d=p$，从整除条件中比较所含 p 的幂次，可得必须 $\alpha\le p$. 由此得到全部候选.

证明

先排除偶数情形. 若偶数 n 含有奇素因子 q，令 $m=n/2$. 由中国剩余定理，可取 $1\le a<m$，使得 $(a,m)=1$ 且 $2a\equiv 1 \pmod q$. 令 $d=2a$，则 $d<n$ 且 $(d,n)=2$. 由题设，模 q 得 $0\equiv d^n+(n-d)^2\equiv 1^n+(-1)^2\equiv 2 \pmod q$，矛盾. 因此偶数解只能是 $n=2^\alpha$.

若 $\alpha\ge 3$，取 $d=2$，则题设要求 $2^\alpha\mid 2^n+(2^\alpha-2)^2$. 但 $2^n+(2^\alpha-2)^2=2^n+4(2^{\alpha-1}-1)^2$，右端所含 2 的幂次恰为 $2<\alpha$，矛盾. 故偶数情形只剩 $n=4$，它包含在 p^α 型中.

以下设 n 为奇数，且至少有两个不同素因子. 任取两个不同素因子 p,q，设 $q^\beta\parallel n$. 令 $d=pa$，其中 $1\le a<n/p$ 且 $(a,n/p)=1$. 于是 $(d,n)=p$，并且 $q\nmid d$. 由题设，模 q^β 得

$$0\equiv d^n+(n-d)^p\equiv d^n-d^p=d^p(d^{n-p}-1) \pmod{q^\beta}.$$

由于 $q\nmid d$，所以 $d^{n-p}\equiv 1 \pmod{q^\beta}$. 当 a 变化时，$d=pa$ 遍历模 q^β 的约系，故

$$x^{n-p} \equiv 1 \pmod{q^{\beta}} \qquad (q \nmid x). \tag{1}$$

若 $\beta \geq 2$，在式 (1) 中取 $x = 1 + q$. 由二项式展开，$(1+q)^{n-p} \equiv 1 + (n-p)q \pmod{q^2}$，从而 $q \mid n - p$. 但 $q \mid n$ 且 $q \nmid p$，矛盾. 因此，在含有多个素因子的情形下，n 必无平方因子.

于是式 (1) 化为模 q 的结论：模 q 的约系中每个元素的 $(n-p)$ 次幂都等于 1. 取模 q 的原根，得 $q - 1 \mid n - p$.

若 n 有三个不同奇素因子，取最大的为 q，再取另外两个不同素因子 p_1, p_2. 由上式分别得到 $q - 1 \mid n - p_1$ 和 $q - 1 \mid n - p_2$，相减得 $q - 1 \mid p_2 - p_1$. 但 $p_1, p_2 < q$ 且 $p_1 \neq p_2$，所以 $0 < |p_2 - p_1| < q - 1$，矛盾.

因此，多素因子情形只能是 $n = pq$，其中 p, q 为不同奇素数.

接下来处理单素因子情形. 设 $n = p^{\alpha}$. 因为 n 为合数，所以 $\alpha \geq 2$. 取 $d = p$，则 $(d, n) = p$，题设要求

$p^{\alpha} \mid p^{p^{\alpha}} + (p^{\alpha} - p)^p = p^p\big(p^{p^{\alpha}-p} + (p^{\alpha-1} - 1)^p\big)$.

括号内模 p 同余于 $(-1)^p$，因此不被 p 整除. 所以该和式中所含 p 的幂次恰为 p，从而必须 $\alpha \leq p$.

综上，必要性已经证明.

反之，$n = p^{\alpha}$ $(2 \leq \alpha \leq p)$ 与 $n = pq$ $(p, q$ 为不同奇素数$)$ 均可直接代入验证满足题设. 故全部解为

$$\boxed{n = p^{\alpha}\ (p \text{ 为素数},\ 2 \leq \alpha \leq p), \quad \text{或} \quad n = pq\ (p, q \text{ 为不同奇素数})}.$$