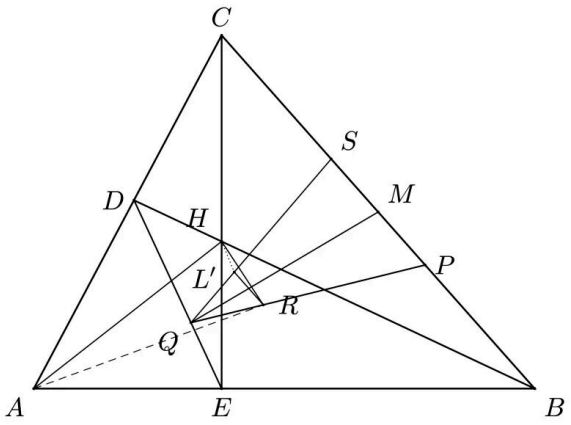
2022 年高联 A1 卷几何的向量证法 & 我做的一个手稿转录 skill

2026-09-06　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_c3ca4c778e1e51e7

2022 年全国高中数学联赛 A1 卷加试第 2 题

如图，在锐角 $\triangle ABC$ 中，H 为垂心，BD, CE 为高，M 为边 BC 的中点．在线段 BM, DE 上各取一点 P, Q，并在线段 PQ 上取一点 R，使得 $\dfrac{BP}{EQ}=\dfrac{CP}{DQ}=\dfrac{PR}{QR}$．设 L 为 $\triangle AHR$ 的垂心，求证：直线 QM 平分线段 RL．



思路　仍取 S 为 P 关于 M 的对称点，并过 R 作 BC 的平行线，交 QS 于 L'．只需证明 L' 正是 $\triangle AHR$ 的垂心．用 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 表示 Q, P, S, R, L'，再验证 $\overrightarrow{HL'}\cdot\overrightarrow{AR}=0$ 即可．

证明 由 $\dfrac{BP}{EQ}=\dfrac{CP}{DQ}$，可设 $\dfrac{EQ}{QD}=\dfrac{BP}{PC}=\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$，其中 $0<\lambda<1$．在 BC 上取点 S，使 $CS=BP$．过点 R 作 BC 的平行线，交 QS 于点 L'．由于 $AH\perp BC$，已有 $RL'\perp AH$，只需证明 $HL'\perp AR$．

记 $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$、$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，$c=|\vec{c}|$、$b=|\vec{b}|$、$A=\angle BAC$．由 D,E 分别为垂足，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{c\cos A}{b}\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\dfrac{b\cos A}{c}\vec{c}$．故

$$\overrightarrow{AQ}=\cos A\left(\lambda\frac{c}{b}\vec{b}+(1-\lambda)\frac{b}{c}\vec{c}\right),\quad \overrightarrow{AP}=\lambda\vec{b}+(1-\lambda)\vec{c},\quad \overrightarrow{AS}=(1-\lambda)\vec{b}+\lambda\vec{c}.$$

由 $\triangle ABC\sim\triangle ADE$，有 $\dfrac{PR}{QR}=\dfrac{BP}{EQ}=\dfrac{CP}{DQ}=\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{1}{\cos A}$．由定比分点公式，并由 $RL'\parallel SP$，

$$\overrightarrow{AR}=\frac{\cos A}{1+\cos A}(b+c)\left(\lambda\frac{\vec{b}}{b}+(1-\lambda)\frac{\vec{c}}{c}\right),$$
$$\overrightarrow{AL'}=\frac{\cos A}{1+\cos A}\big((1-\lambda)b+\lambda c\big)\left(\frac{\vec{b}}{b}+\frac{\vec{c}}{c}\right).$$

又 $BH\perp AC$、$CH\perp AB$，所以 $\overrightarrow{AH}\cdot\vec{b}=\overrightarrow{AH}\cdot\vec{c}=bc\cos A$．记 $k=\cos A$．注意

$$\left(\frac{\vec{b}}{b}+\frac{\vec{c}}{c}\right)\cdot\left(\lambda\frac{\vec{b}}{b}+(1-\lambda)\frac{\vec{c}}{c}\right)=1+k.$$

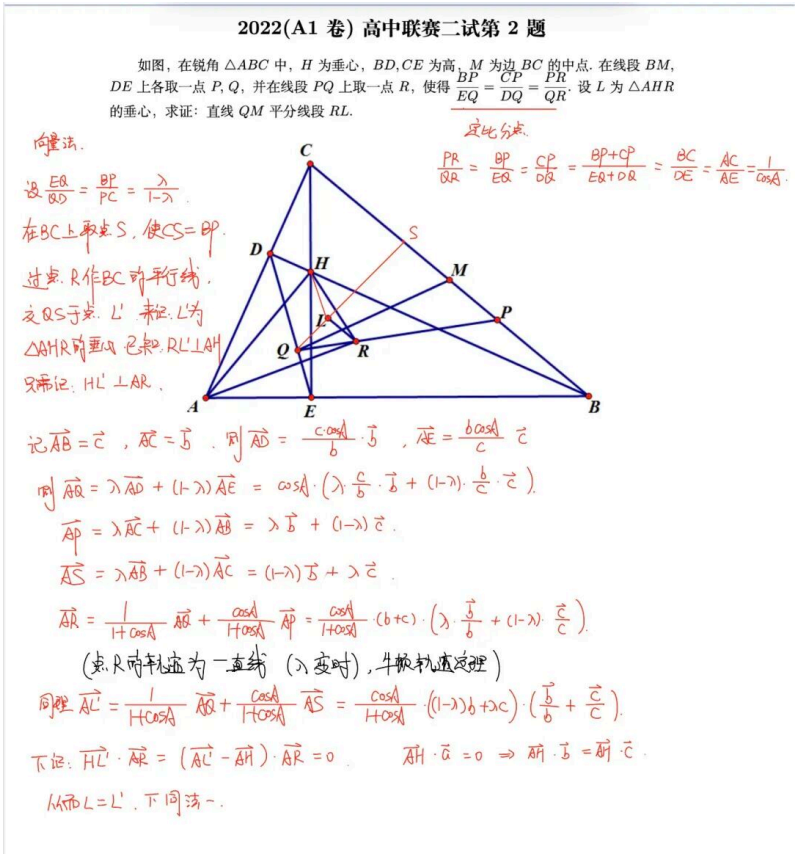
于是

$$\overrightarrow{AL'}\cdot\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AR}=\frac{k^2}{1+k}(b+c)\big((1-\lambda)b+\lambda c\big).$$

因此 $\overrightarrow{HL'}\cdot\overrightarrow{AR}=(\overrightarrow{AL'}-\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{AR}=0$，即 $HL'\perp AR$．结合 $RL'\perp AH$，可知 L' 为 $\triangle AHR$ 的垂心，故 $L'=L$．

又 M 为 SP 的中点，且 $LR\parallel SP$，所以直线 QM 通过线段 LR 的中点．故命题得证．

以上内容由我做的数学竞赛手稿转录 skill（公开版）.zip 完成，原手稿如下：



这个 Skill 面向数学竞赛手稿、题目图片和扫描 PDF 的整理，可自动识别题目与原有解法，在尽量保留原作者思路的基础上补全跳步，生成完整解答和简洁的“思路”说明。针对数学竞赛中的专业用语、排版紧凑度（如减少不必要的行间公式）以及几何作图等方面，也进行了专门优化。

几何题采用“先完成解答、再统一作图”的流程，避免随着解答修改反复重画，并支持批量生成、筛选 TikZ 图形，从而节省大量处理时间和 Token 消耗。完成内容整理后，还会自动进行 LaTeX 排版与检查，并生成 PDF 和完整项目文件。

本 Skill 可在多个 AI 平台上稳定使用，包括豆包等，也欢迎大家实际体验并反馈使用效果。

我个人使用的版本还会自动调用带“恩次方根”Logo 页眉的 encifanggen.sty 模板、添加作者信息，并为了方便公众号发布，额外增加了 A6 纸张版支持，例如上文展示的效果。本文分享的公开版去掉了这些个人化功能，但仍可通过提示词自行设置图片或文字页眉，使用者也可以根据自己的需求继续修改和扩展。

更多具体流程、功能细节和使用方法，可以进一步阅读项目中的