2021 年印度尼西亚数学奥林匹克

2021-11-18　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_c4ce0484598f8f18

第一天

1. 黑板上顺次写着数字：1，2，3，4，5，6，7，8，9．Andi 在每两个相邻的数字之间放置 +（加号）或者 −（减号），并计算出式子的值．求 Andi 不能得到的最小正奇数．

2. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形．D 和 E 分别为 AB 和 AC 的中点．设 L_1 和 L_2 分别为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 的外接圆．CD 交 L_1 于点 $M(M \neq C)$，交 L_2 于点 $N(N \neq D)$．若 $DM = DN$，求证：$\triangle ABC$ 为等腰三角形．

3. 若一个自然数能写成 p^n 的形式（其中 p 为素数，n 为自然数），则称其为素数幂．求 n 的最大可能值，使得存在一个素数幂数列 a_1，a_2，$\cdots$，a_n，满足对任意 $3 \leq i \leq n$，都有 $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$．

4. 正实数 x，y，z 满足 $x + y + z = 3$．求证：

$$\begin{aligned} &2\sqrt{x+\sqrt{y}} + 2\sqrt{y+\sqrt{z}} + 2\sqrt{z+\sqrt{x}} \\ \leq &\sqrt{8+x-y} + \sqrt{8+y-z} + \sqrt{8+z-x} \end{aligned}$$

第二天

1. 已知实系数多项式 $P(x) = x^2 + rx + s$ 有两个不同实根，且两根均小于 -1，两根之差小于 2．求证：对任意实数 x，都有 $P(P(x)) > 0$．

2. 黑板上写着 n 个自然数．每一次操作，能够擦去黑板上的两个数 a 和 b，并将其更改为 $\gcd(a,b)$ 和 $\operatorname{lcm}(a,b) - \gcd(a,b)$．求证：在有限次操作后，黑板上所有的数均相等．

3. $\triangle ABC$ 的外接圆为 ℓ．$\triangle ABC$ 内部一点 M 满足 AM 平分 $\angle BAC$．以 M 为圆心，MB 为半径的圆交 ℓ 于点 D（异于点 B），交 BC 于点 E（异于点 B）．设 P 为圆 ℓ 上不含点 A 的弧 BC 的中点．求证：AP 平分 $\angle DPE$ 当且仅当 $\angle B = 90^\circ$．

4. 在一个 100×100 的棋盘上，放置一些 1×3 和 3×1 的小木块，满足以下条件：

- 初始棋盘的每一格至多被一个小木块所覆盖；
- 除了一个格子外，小木块覆盖了棋盘剩余的每一格；
- 小木块的边平行于棋盘的边放置．设共用了 H 个 1×3 的小木块，V 个 3×1 的小木块．求数对 (H, V) 的所有可能值．



程国根

江西 上饶

扫一扫上面的二维码图案，加我微信

恩次方根