一分钟做不等式系列（10）——2024 年 IFYM&2025 年广州市预赛

2025-04-29　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_c5aa03dd290caa2e

29 (2024 年 IFYM& 2025 广州市预赛). 对任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，证明：

$$\left(\max_{1\le i\le n} x_i\right)^2 + 4\sum_{i=1}^{n-1}\left(\max_{1\le j\le i} x_j\right)(x_{i+1}-x_i) \le 4x_n^2.$$

证明 考虑 $S=\left\{1\le k\le n \mid x_k > \max_{1\le j\le k-1} x_j\right\}$（不妨令 $x_0<x_1$，这样 $1\in S$）.

设 S 中全体元素为 $1=k_1<k_2<\cdots<k_t\le n$，注意到

$$\sum_{i=k_s}^{k_{s+1}-1}\left(\max_{1\le j\le i} x_j\right)(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=k_s}^{k_{s+1}-1} x_{k_s}(x_{i+1}-x_i) = x_{k_s}(x_{k_{s+1}}-x_{k_s}), 1\le s\le t-1$$

$$\sum_{i=k_t}^{n-1}\left(\max_{1\le j\le i} x_j\right)(x_{i+1}-x_i) = x_{k_t}(x_n-x_{k_t}), (k_t=n\text{时均为 }0\text{, 也成立})$$

原不等式等价于

$$\begin{aligned}
&x_{k_t}^2 + 4\sum_{s=1}^{t-1} x_{k_s}(x_{k_{s+1}}-x_{k_s}) + 4x_{k_t}(x_n-x_{k_t}) \le 4x_n^2\\
\iff &4\sum_{s=1}^{t-1} x_{k_s}^2 + 3x_{k_t}^2 + 4x_n^2 \ge 4\sum_{s=1}^{t-1} x_{k_s}x_{k_{s+1}} + 4x_{k_t}x_n\\
\iff &2x_1^2 + 2\sum_{s=1}^{t-1}(x_{k_s}-x_{k_{s+1}})^2 + (x_{k_t}-2x_n)^2 \ge 0
\end{aligned}$$

显然成立，证毕.

去年龙老师翻译的时候就做了，没想到被用作了广州的预赛题。思路比较简单，就是最大值取相同的那些项是可以合并的，设出来之后配方就可以，但过程有一点难写。