2023 年中国台湾 IMOC 组合组

2023-09-20　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_c5cfa22ce7abe7b3

每年，我国台湾的前 IMO 参赛者组成的小团体都会举办一个夏令营，讲解知识和技巧，还有 8 次模拟考试。从 2017 年开始，他们取消了模拟考试，用若干练习题来取代。下面就是 2023 年夏令营的 IMOC 练习题。

2023 年中国台湾 IMOC

程国根　译

组合组

1. 桌子上有 n 张卡片拍成一列，每张卡片上写有一个正实数．LTF 和 Sunny 进行一个游戏，从 LTF 开始，他们轮流拿走一张处于两端的卡片，最后所拿卡片上的数字之和较大者获胜．求所有的正整数 n，使得不论卡片上写有什么数字，LTF 总能阻止 Sunny 获胜．

2. 一座正方形房子被分割为 $n\times n$ 的网格，其中每个单元格都是一个房间，每两个相邻的房间之间都一扇门相连接．这些门中有正常的，也有颠倒的．如果 USJL 走过一扇颠倒的门，他会变成倒立的 USJL，反之亦然．USJL 需要选择一个房间作为起点，然后不重复地经过每一个房间．在完成后，如果 USJL 是倒立的，则他会永远被困在房子里．证明：USJL 总能逃脱这个房子．

3. 图 G 有 $n\geq 2$ 个顶点．求最大的正整数 m，使得下面两个命题总有一个成立：
(1) 存在一个边数为 $k\geq m$ 的圈；(2) 存在一个顶点数为 m 的独立子图．

4. 画鬼脚是一个在一些竖直线和水平线上进行的游戏．玩家从一条竖直线的顶部开始，然后向下走，如果遇到水平线，必须穿过一条水平线．这里的水平线均夹在两条竖直线之间．定义图层是一些具有相同高度的水平线，并且没有重复的端点．求图层的最小个数，使得能从竖直线顶部的 $(1,2,\cdots,n)$ 出发，能达到底部的任意一个排列 $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$．

5. 在一个 2023×2023 的方格表中，不重复地填入数字 $1,2,\cdots,2023^2$．求最大的整数 M，使得存在一种填数方式，其中任意两个相邻方格中的数字，它们的差都至少为 M．
注：这里认为方格表第 1 列和第 2023 列，第 1 行和第 2023 行是相邻的，即称方格 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 相邻，当且仅当 $x_1=x_2$，$y_1-y_2=\pm 1 \pmod{2023}$，或 $y_1=y_2$，$x_1-x_2=\pm 1 \pmod{2023}$．

6. 给定整数 $n\geq 3$．在黑板上写有数字 $1,2,\cdots,n$．每一次操作，可以选择黑板上的两个数字 x,y 擦去它们，并写上 $x+y$ 和 $|x-y|$．求所有整数 X，使得可以在有限次操作后，将黑板上的数字全部变为 X．

4

注：第 4 题中的画鬼脚游戏又称画线抽签游戏或阿弥陀签，可以看下面这集蜡笔小新。

2023 年中国台湾 IMOC

程国根　译

组合组

1. 桌子上有 n张卡片拍成一列，每张卡片上写有一个正实数．LTF 和 Sunny 进行一个游戏，从 LTF 开始，他们轮流拿走一张处于两端的卡片，最后所拿卡片上的数字之和较大者获胜．求所有的正整数 n，使得不论卡片上写有什么数字，LTF 总能阻止 Sunny 获胜．

2. 一座正方形房子被分割为 $n\times n$的网格，其中每个单元格都是一个房间，每两个相邻的房间之间都一扇门相连接．这些门中有正常的，也有颠倒的．如果 USJL 走过一扇颠倒的门，他会变成倒立的 USJL，反之亦然．USJL 需要选择一个房间作为起点，然后不重复地经过每一个房间．在完成后，如果 USJL 是倒立的，则他会永远被困在房子里．证明：USJL 总能逃脱这个房子．

3. 图 G有 $n\ge 2$个顶点．求最大的正整数 m，使得下面两个命题总有一个成立：(1) 存在一个边数为 $k\ge m$的圈；(2) 存在一个顶点数为 m的独立子图．

4. 画鬼脚是一个在一些竖直线和水平线上进行的游戏．玩家从一条竖直线的顶部开始，然后向下走，如果遇到水平线，必须穿过一条水平线．这里的水平线均夹在两条竖直线之间．定义图层是一些具有相同高度的水平线，并且没有重复的端点．求图层的最小个数，使得能从竖直线顶部的 $(1, 2, \cdots, n)$出发，能达到底部的任意一个排列 $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$．

5. 在一个 2023×2023的方格表中，不重复地填入数字 1,2,$\cdots$,2023^{2}．求最大的整数 M，使得存在一种填数方式，其中任意两个相邻方格中的数字，它们的差都至少为 M.

注：这里认为方格表第 1列和第 2023列，第 1行和第 2023行是相邻的，即称方格 (x_{1},y_{1})和 (x_{2},y_{2})相邻，当且仅当 $x_{1}=x_{2}$，$y_{1}-y_{2}=\pm 1\pmod{2023}$，或 $y_{1}=y_{2}$，$x_{1}-x_{2}=\pm 1\pmod{2023}$.

6. 给定整数 $n\ge 3$．在黑板上写有数字 $1,2,\cdots,n$．每一次操作，可以选择黑板上的两个数字 x,y擦去它们，并写上 $x+y$和 $|x-y|$．求所有整数 X，使得可以在有限次操作后，将黑板上的数字全部变为 X.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2023年中国台湾IMOC}\flushright 程国根\quad 译\section*{组合组}\setcounter{ex}{0}\ex 桌子上有$n$张卡片拍成一列，
↪ 每张卡片上写有一个正实数．LTF和Sunny进行一个游戏，从LTF开始，他们轮流拿走一张处于两端的卡片，
↪ 最后所拿卡片上的数字之和较大者获胜．求所有的正整数$n$，使得不论卡片上写有什么数字，LTF总能阻止Sunny获胜．\vfill
\ex 一座正方形房子被分割为$n\times n$的网格，其中每个单元格都是一个房间，每两个相邻的房间之间都一扇门相连接．
↪ 这些门中有正常的，也有颠倒的．如果USJL走过一扇颠倒的门，他会变成倒立的USJL，反之亦然．
↪ USJL需要选择一个房间作为起点，然后不重复地经过每一个房间．在完成后，如果USJL是倒立的，则他会永远被困在房子里．
↪ 证明：USJL总能逃脱这个房子．\vfill
\ex 图 $G$ 有 $n\ge 2$ 个顶点．求最大的正整数 $m$，使得下面两个命题总有一个成立：
(1) 存在一个边数为 $k\ge m$ 的圈；(2) 存在一个顶点数为 $m$ 的独立子图．\vfill
\ex 画鬼脚是一个在一些竖直线和水平线上进行的游戏．玩家从一条竖直线的顶部开始，然后向下走，如果遇到水平线，
↪ 必须穿过一条水平线．这里的水平线均夹在两条竖直线之间．定义图层是一些具有相同高度的水平线，并且没有重复的端点．
↪ 求图层的最小个数，使得能从竖直线顶部的$(1, 2, \cdots, n)$出发，能达到底部的任意一个排列$(\sigma_1, \sigma_2, \ldots,
↪ \sigma_n)$．\vfill
\ex 在一个$2023\times 2023$的方格表中，不重复地填入数字$1$,$2$,$\cdots$,$2023^{2}$．求最大的整数$M$，
↪ 使得存在一种填数方式，其中任意两个相邻方格中的数字，它们的差都至少为$M$．\\
```

注：这里认为方格表第1列和第2023列，第1行和第2023行是相邻的，即称方格(x_{1},y_{1})和(x_{2},y_{2})相邻，当且仅当$x_{1}=x_{2}$，$y_{1}-y_{2}=\pm 1\pmod{2023}$，或$y_{1}=y_{2}$，$x_{1}-x_{2}=\pm 1\pmod{2023}$. \vfill

\ex 给定整数$n\ge 3$. 在黑板上写有数字$1,2,\cdots,n$. 每一次操作，可以选择黑板上的两个数字x,y擦去它们，并写上$x+y$和$|x-y|$. 求所有整数X，使得可以在有限次操作后，将黑板上的数字全部变为X. \vfill