2024 年各省市高联预赛试题整理（免费下载 pdf、tex）

2024-05-24　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_c9b37004b3f727ff

包含已考完的全部 8 个省市，所有几何图形均用 LaTeX 重新作图。

目录

1 2024 年北京预赛 3

2 2024 年重庆预赛 5

3 2024 年广西预赛 6

4 2024 年吉林预赛 8

5 2024 年内蒙古预赛 11

6 2024 年上海预赛 12

7 2024 年四川预赛 13

8 2024 年浙江预赛 14

部分试题预览：

1 2024 年北京预赛

一试

考试时间：2024 年 5 月 19 日 08:00-09:20

填空题（1-8 题每题 8 分，第 9 题 16 分，第 10,11 题每题 20 分，共 120 分）

1. 设整数集合 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$，若 A 中所有三元子集的三个元素之积组成的集合为 $B=\{-30,-15,-10,-6,-5,-3,2,6,10,15\}$，则集合 $A=$ _____.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, & x<0;\\ \ln\left(\frac{1}{2}x+1\right), & x\geqslant 0.\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(f(x))=m$ 恰有三个不相等的实数根 x_1,x_2,x_3 且满足 $x_1<x_2<x_3$，则 $\dfrac{2x_1+9}{\ln(x_2+4)}$ 的取值范围是 _____.

3. 从 $1,2,\cdots,2024$ 中任取两个数 $a,b(a\leqslant b)$，则 3^a+7^b 的值中，个位数字为 8 的数有 _____ 个.

4. 设复数 z 满足 $|3z-2i|=6$，令 $z_1=\dfrac{z^2-10z+74}{z-5+7i}$，则 $|z_1|$ 的最大值是 _____.

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & \text{若}x\text{为无理数;}\\ \dfrac{q+1}{p}, & \text{若}x=\dfrac{q}{p},\text{其中}p,q\in\mathbb{N}^*,\text{且}p,q\text{互质},p>q.\end{cases}$ 则函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{8}{9},\frac{9}{10}\right)$ 上的最大值为 _____.

6. 对于 $c>0$，若非零实数 a,b 满足 $4a^2-2ab+4b^2-c=0$，且使 $|2a+b|$ 最大，则 $\dfrac{3}{a}-\dfrac{4}{b}+\dfrac{2}{c}$ 的最小值为 _____.

7. 已知函数 $f(x)=\cos^4x+\sin^4x+a\sin 4x-b$，且 $f\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 为奇函数．若方程 $f(x)+m=0$ 在 $[0,\pi]$ 上有四个不同的实数解 x_1,x_2,x_3,x_4，则 $f\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)$ 的平方值为 _____.

8. 已知 $A\subseteq\{1,2,\cdots,2625\}$，且 A 中任意两个数的差的绝对值不等于 4，也不等于 9．则 $|A|$ 的最大值为 _____.

9. 设多项式 $f(x)=x^{2024}+\sum\limits_{i=0}^{2023}c_ix^i$，其中 $c_i\in\{-1,0,1\}$．记 N 为 $f(x)$ 的正整数根的个数（含重根）．若 $f(x)$ 无负整数根，N 的最大值是 _____.

10. 在棱长为 4 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为棱 AA_1 上的一点，且 $A_1E=1$．F 为截面 A_1BD 上的动点，则 $AF+FE$ 的最小值等于 _____.

11. 数列 $\{a_n\}$ 定义如下：设 $\dfrac{(2n)!}{n!(n+2024)!}$ 写成既约分数后的分母为 $A(n)$，a_n 等于 $2A(n)$ 的最大质因数，则 a_n 的最大值等于 _____.

3

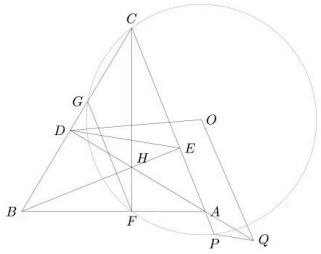
二试

考试时间：2024 年 5 月 19 日 09:40-12:30

一、(40 分) 设 a,b,c 是三个正数，求证：

$$\frac{2a}{\sqrt{2a^2+b^2+c^2}}+\frac{2b}{\sqrt{a^2+2b^2+c^2}}+\frac{2c}{\sqrt{a^2+b^2+2c^2}}\leqslant\frac{3\sqrt{2}(a+b+c)}{\sqrt{5a^2+5b^2+5c^2+ab+bc+ca}}.$$

二、(40 分) 如图，锐角 $\triangle ABC$ 的三条高线 AD,BE,CF 交于点 H，过点 F 作 $FG\parallel AC$ 交直线 BC 于点 G. 设 $\triangle CFG$ 的外接圆为 $\odot O$，$\odot O$ 与直线 AC 的另一个交点为 P，过 P 作 $PQ\parallel DE$ 交直线 AD 于点 Q，连接 OD,OQ. 求证：$OD=OQ$.



三、(50 分) 有 n 个球队参加比赛，球队之间的比赛计划已经安排好了. 但是每场比赛的主场客场还没有分配好. 这时每个球队都上报了自己能够接受的客场比赛的最大次数. 最终组委会发现这些次数加在一起恰好是比赛的总场次，并且组委会还发现任意挑出若干支球队，他们能够接受的客场次数之和都要大于等于他们之间的比赛总场次. 请问组委会能否安排好主客场使得每支球队都满意，请证明你的结论.

四、(50 分) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个两两不同的正整数且 $a_1a_2\cdots a_n$ 恰有 4048 个质因数. 如果 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中任意多个数相乘均不是一个整数的 4049 次方，求 n 的最大值.

7　2024 年四川预赛

考试时间：2024 年 5 月 19 日 09:00-11:00

一、填空题（本大题共 8 小题，每小题 8 分，共 64 分）

1. 设函数 $f(x)=\ln|x|+|x|-2$ 的零点都在区间 $[a,b]$（$a,b\in\mathbb{Z}$，$a<b$）内．则 $b-a$ 的最小值为 _____．

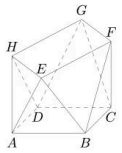
2. 已知 $a>b>1$，若 $\log_a b+\log_b a=\dfrac{5}{2}$，则 $\dfrac{b}{a+4}$ 的最大值为 _____．

3. 设 $a\in\mathbb{R}$，若函数 $f(x)=ax-\dfrac{a}{x}-2\ln x$ 在其定义域内为单调递增函数．则实数 a 的最小值为 _____．

4. 用 $f(X,\Gamma)$ 表示点 X 与曲线 Γ 上任意一点距离的最小值．已知 $\odot O:x^2+y^2=1$ 及 $\odot O_1:(x-4)^2+y^2=4$，设 P 为 $\odot O$ 上的动点，则 $f(P,\odot O_1)$ 的最大值为 _____．

5. 设 $\triangle ABC$ 中，$AC=2$，$\angle ABC=2\angle BAC$，则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 _____．

6. 将边长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 绕着其中心旋转 45° 得到一个十面体 $ABCD-EFGH$(如图)，则该十面体的体积为 _____．



7. 若 $T=\sum\limits_{k=1}^{100}2^{99+k}\cdot 3^{101-k}$，则 T 的末尾数字 0 的个数为 _____．

8. 记 $I=\{1,4,5,6\}$，$U=\{1,2,3,\cdots,25\}$，集合 U 的子集 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ 满足 $|a_i-a_j|\notin I$（$\forall 1\leqslant i<j\leqslant 5$），则符合条件的集合 A 的个数为 _____．（用具体数字作答）

二、解答题（本大题共 3 小题，满足 56 分）

9. 已知 t 为正实数，若曲线 $y=t\cdot e^x$ 与椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 交于 AB 两个不同的点，求证：直线 AB 的斜率 $k<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$．

10. 设复数 x,y,z 满足：$|x+2y+3z|=1$．求 $|x|^2+|y|^2+|z|^2+\left|x^2+y^2+z^2\right|$ 的最小值．

11. 给定正整数 $n\geqslant 2$，数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为" 好数组" 是指：$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均不为 0，$a_1=1$，且对任意的 $1\leqslant k\leqslant n-1$，均有 $(a_{k+1}+a_k)(a_{k+1}-a_k-1)=0$．求" 好数组"$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的组数．

13

再放个作图代码凑字数:

```
\begin{tikzpicture}\tkzDefPoints{2/0/A,-3/0/B,0/5/C}\tkzDefPointBy[projection = onto B--C](A)
↪ \tkzGetPoint{D}\tkzDefPointBy[projection = onto C--A](B) \tkzGetPoint{E}\tkzDefPointBy[projection = onto A--B](C)
↪ \tkzGetPoint{F}\tkzInterLL(A,D)(B,E)\tkzGetPoint{H}\tkzDefLine[parallel=through F](A,C)
↪ \tkzGetPoint{f}\tkzInterLL(F,f)(B,C)\tkzGetPoint{G}\tkzDefTriangleCenter[circum](C,F,G)
↪ \tkzGetPoint{O}\tkzInterLC(A,C)(O,C) \tkzGetSecondPoint{P}\tkzDefLine[parallel=through P](D,E)
↪ \tkzGetPoint{p'}\tkzInterLL(P,p')(A,D) \tkzGetPoint{Q}\tkzDrawSegments(A,B B,C C,P A,D B,E C,F G,F D,Q O,D O,Q P,Q
↪ D,E)\tkzDrawCircle(O,C)\tkzLabelPoints[right](A,E,O,Q)\tkzLabelPoints[above](C)\tkzLabelPoints[below](F,P)\tkzLabelPoint
↪ s[left](B,D,G)\tkzLabelPoints[above right](H)\end{tikzpicture}
```