2025 年加拿大数学奥林匹克

2025-03-08　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_ca534e673ed80bcc

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

2025 年加拿大数学奥林匹克

程国根　译

高级组

1. 一支曲棍球队的 n 名队员聚在一起选举队长．一开始，他们站成一个圆圈，每个人都投票给自己左边的人．

队员们将通过一系列轮次来更新他们的投票．在每一轮中，每位队员 a 按照以下程序依次更新自己的投票：在更新前，如果 a 投票给 b，且 b 投票给 c，那么 a 就把自己的投票更新为 c（注意 a、b 和 c 不一定不同；如果 $b=c$，那么 a 的这次投票就不改变）．在每一轮中，每位队员都恰更新一次投票，更新顺序由队员们自行决定（不同轮次的顺序可能不同）．

证明：在重复上面的更新程序 n 轮后，所有 n 名队员会一致投票给同一个人．

2. 求所有的正整数 b,c,p，满足 p 和 $p+2$ 是奇素数，且 $2^a p^b=(p+2)^c-1$ ．

3. 如果存在整数 $n\geq d$，使得对任意整数 $0\leq i\leq n$，都有 $c_i=c_{n-i}$（当 $i>d$ 时，$c_i=0$），则称 d 次多项式 $c_d x^d+c_{d-1}x^{d-1}+\cdots+c_1x+c_0$ 为自反多项式．设整数 $\ell\geq 2$，$p(x)$ 是任意一个整系数多项式．证明：存在整系数的自反多项式 $q(x)$、$r(x)$，使得 $(1+x+x^2+\cdots+x^{\ell-1})p(x)=q(x)+x^{\ell}r(x)$．

4. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ，且 $AB\neq AC$．点 D 和 E 位于 Γ 上不包含点 A 的弧 BC 上，使得 $\angle BAE=\angle DAC$．设 $\triangle BAE$ 和 $\triangle CAD$ 的内心分别为 X 和 Y，$\triangle BAE$ 和 $\triangle CAD$ 的内切圆的外公切线相交于点 Z．证明点 Z 位于 Γ 与 $\triangle AXY$ 外接圆的公共弦上．

5. 一个矩形 R 被分割成有限个小矩形的集合 S，这些小矩形的边与 R 的边平行，且 S 中任意三个小矩形都不共顶点．一只蚂蚁最初位于 R 的左下角．在一次操作中，我们可以选择 S 中的一个矩形 r，如果蚂蚁当前位于 r 的一个角 c 上，那么可以将蚂蚁移动到 r 中与 c 相邻的两个角之一．

假设经过有限次操作后，蚂蚁最终到达了 R 的右上角．证明：S 中至少有一个矩形在至少两次操作中被选中．

1

2025 年加拿大数学奥林匹克

程国根　译

初级组

1. 假设一个无穷的、非常数的整数等差数列包含 1．证明：这个数列中有无数个完全立方数．

2. 在梯形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，且 $BC \neq DA$．一个过 C 和 D 的圆 Γ 分别与直线 AC, AD, BC, BD 再次相交于 W, X, Y, Z．证明：WZ, XY, AB 三线共点．

3. 同高级组第 1 题

4. 同高级组第 2 题

5. 同高级组第 3 题