2024 年普特南数学竞赛

2024-12-10 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_cafe435cfbc99e4a

本文为图片版：正文为 2 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

2024 年普特南数学竞赛

程国根 译

A 1. 求所有正整数 n，使得存在正整数 a,b,c，满足

$$2a^n+3b^n=4c^n.$$

A 2. 求所有多项式 p，使得存在多项式 q，满足对任意实数 x，都有

$$p(p(x))-x=(p(x)-x)^2q(x).$$

A 3. 设 S 为所有满足如下条件的双射

$$T:\{1,2,3\}\times\{1,2,\cdots,2024\}\to\{1,2,\cdots,6072\}$$

组成的集合：对任意 $j\in\{1,2,\cdots,2024\}$，都有 $T(1,j)<T(2,j)<T(3,j)$；对任意 $i\in\{1,2,3\}$ 和 $j\in\{1,2,\cdots,2023\}$，都有 $T(i,j)<T(i,j+1)$.
是否存在 $a,c\in\{1,2,3\}$ 和 $b,d\in\{1,2,\cdots,2024\}$，使得满足 $T(a,b)<T(c,d)$ 的映射 T 的个数与 S 中元素个数之比在 $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$ 中?

A 4. 求所有素数 $p>5$，使得存在整数 a 和整数 $1\le r\le p-1$，满足下述性质：能将数列 $1,a,a^2,\cdots,a^{p-5}$ 重新排列为数列 $b_0,b_1,b_2,\cdots,b_{p-5}$，使得对任意 $1\le n\le p-5$，都有 $p\mid b_n-b_{n-1}-r$.

A 5. 考虑一个以原点为圆心，半径为 9 的圆周 Ω，和一个以 $(r,0)$ 为圆心 $(0\le r\le 8)$，半径为 1 的圆盘 Δ. 在 S 上独立、均匀地随机选取两个点 P 和 Q，哪些 r 的取值能使 PQ 与 Δ 相交的概率最小?

A 6. 数列 $c_0,c_1,c_2,\cdots$ 定义如下：对充分小的实数 x，

$$\frac{1-3x-\sqrt{1-14x+9x^2}}{4}=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k.$$

对正整数 n，设 $n\times n$ 矩阵 A 第 i 行第 j 列的元素为 c_{i+j-1}，$i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$. 求 A 的行列式.

1

B 1. 设 n,k 为正整数. 在一个 $n\times n$ 的方格表中，第 i 行第 j 列的小方格中写有数字 $i+j-k$. 对怎样的 n 和 k，能够从方格表中选取 n 个小方格，其中任意两个小方格不同行且不同列，使得所选方格中的数字恰好包含 $1,2,\cdots,n$.

B 2. 称两个凸四边形为“伙伴”，如果它们有三个相同顶点，且若将它们记为 $ABCD$ 和 $ABCE$，则点 D 和点 E 关于对角线 AC 的中垂线轴对称. 是否存在一个由无穷多个凸四边形构成的序列，使得每个凸四边形都与它的后继凸四边形为伙伴，且序列中没有两个相同的四边形?

B 3. 将方程 $\tan x=x$ 的所有正根从小到大依次排列，设第 n 个为 r_n. 求证: 对任意正整数 n，都有

$$0<r_{n+1}-r_n-\pi<\frac{1}{(n^2+n)\pi}.$$

B 4. 设 n 为正整数. $a_{n,0}=1$，且对任意 $k\geq 0$，在集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中等概率地选取一个整数 $m_{n,k}$，令

$$a_{n,k+1}=\begin{cases}a_{n,k}+1, & \text{若} m_{n,k}>a_{n,k};\\ a_{n,k}, & \text{若} m_{n,k}=a_{n,k};\\ a_{n,k}-1, & \text{若} m_{n,k}<a_{n,k}.\end{cases}$$

设 $E(n)$ 为 $a_{n,n}$ 取值的数学期望. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{E(n)}{n}$ 的值.

B 5. 设 k,m 为正整数. 对正整数 n，设 $f(n)$ 为满足 $1\leq x_1\leq\cdots z_k\leq z\leq m$ 且 $1\leq y_1\leq\cdots\leq y_m\leq z\leq n$ 的整数数列 $x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_m,z$ 的个数.
求证: $f(n)$ 为关于 n 的非负系数多项式.

B 6. 对实数 a，记 $F_a(x)=\sum\limits_{n\geq 1}n^a e^{2n}x^{n^2},0\leq x\leq 1$. 求实数 c，使得对任意 $a<c$，都有 $\lim\limits_{x\to 1^-}F_a(x)e^{-1/(1-x)}=0$，且对任意 $a>c$，都有 $\lim\limits_{x\to 1^-}F_a(x)e^{-1/(1-x)}=\infty$.