用 Abel 变换和加强归纳解一道高联代数题

2024-11-01 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_cb4a8f076d4e4014

2021 年高联 A2 卷加试第三题是一个代数最值问题，题目如下：

给定整数 $n \geq 2$. 设非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$. 求 $a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + \cdots + a_1a_2 \cdots a_n$ 的最小值.

分析：

先猜测取等，由条件，优先猜测变量全部相等或有变量取零. 经试验，发现当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ 以及 $a_1 = n$，$a_2 = \cdots = a_n = 0$ 时，$a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + \cdots + a_1a_2 \cdots a_n$ 均取得 n. 可合理猜测 n 即为最小值，下面进行证明.

尝试总结出本题的一些关键特征：“问题和正整数 n 有关 “、“变量有序的关系（不减）”、“要处理若干乘积之和”，我们考虑使用数学归纳法和 Abel 变换.

记 $S_k = a_1 + a_1a_2 + \cdots + a_1a_2 \cdots a_k$，则

$$\begin{aligned} S_{n+1} =& a_1 + a_1 \cdot a_2 + a_1a_2 \cdot a_3 + \cdots + a_1 \cdots a_n \cdot a_{n+1} \\ =& a_1 + \sum_{k=1}^{n} a_1 \cdots a_k \cdot a_{k+1} \\ =& a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} S_k(a_{k+1} - a_{k+2}) + S_n a_{n+1} \end{aligned}$$

这里已经建立起了 S_{n+1} 与 $S_1, \cdots, S_n$ 的关系，且每个 S_k 的系数均非负，故可以进行放缩，而这需要 $S_1, \cdots, S_n$ 存在不等关系，可以考虑使用第二数学归纳法.

在尝试直接用数学归纳法证明时，我们会遇到新的问题：在 $n+1$ 的情形下，$1, \cdots, n$ 情形的前提条件不一定成立（事实上，若条件成立，必有 $a_1 = \cdots = a_{n+1} = 1$，而这不是恒成立的）. 所以直接使用数学归纳法失败了.

一般而言，在直接使用数学归纳法失败时，我们可以尝试进行加强归纳，主要途径有两种：加强条件（即证明结论对更一般的情况成立）、加强结论（这个很好理解），本题是在条件方面出了问题，所以我们将条件加强.

由 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ 可知，这一组变量是 “头重脚轻 “的，所以如果将条件加强为 $a_1 + \cdots + a_n \geq n$，那么我么可以由 $a_1 + \cdots + a_{k+1} \geq k+1$ 推出 $\forall 1 \leq i \leq k$，都有 $a_1 + \cdots + a_i \geq i$. 这样就完成了本题的证明.

具体过程如下：

解答（PDF 中已展开）

解答：

对任意 $k \in \mathbb{N}_+$，记 $S_k = a_1 + a_1a_2 + \cdots + a_1a_2 \cdots a_k$.

取 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$，得 $S_n = n$.

下证：$\forall n \geq 2$，都有 $S_n \geq n$，从而 S_n 的最小值为 n.

将原命题加强为：

给定正整数 n，设非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$，$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$，则 $S_n \geq n$.

用第二数学归纳法进行证明：

（1）$n = 1$ 时，$S_1 = a_1 \geq 1$，结论成立.

（2）假设 $n \leq k$ 时，结论成立. 那么 $n = k + 1$ 时，

由 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq k + 1$ 知，$\forall 1 \leq i \leq k$，

$\frac{a_1+\cdots+a_i}{i} \geq \frac{a_1+\cdots+a_{k+1}}{k+1}$

即 $a_1 + \cdots + a_i \geq \frac{i}{k+1} \cdot (k + 1) = i$. 由 Abel 变换和归纳假设：

$$\begin{aligned}
S_{k+1} =& a_1 + a_1 \cdot a_2 + a_1a_2 \cdot a_3 + \cdots + a_1 \cdots a_k \cdot a_{k+1} \\
=& a_1 + \sum_{i=1}^{k} a_1 \cdots a_i \cdot a_{i+1} \\
=& a_1 + \sum_{i=1}^{k-1} S_i(a_{i+1} - a_{i+2}) + S_k a_{k+1} \\
\geq& a_1 + \sum_{i=1}^{k-1} i(a_{i+1} - a_{i+2}) + k a_{k+1} \\
=& a_1 + \sum_{i=1}^{k} 1 \cdot a_{i+1} \\
\geq& k + 1
\end{aligned}$$

于是 $n = k + 1$ 时，结论成立.

由（1）（2）知，结论成立，即最小值为 n.

注：

一般而言，在结论仍成立的前提下，适当加强命题进行归纳证明，能大大简化证明过程. 这也是数学归纳法的独特之处，加强命题的同时也加强了归纳递推过程中的条件.

可以通过以下简单例子进行理解：

$\{a_n\}, \{b_n\}$ 定义如下：$a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3^{a_n}$, $b_1 = 8$, $b_{n+1} = 8^{b_n}$. 求证：对任意正整数 n, $a_{n+1} > b_n$.

读者可以尝试直接归纳、加强为 $a_{n+1} > 2b_n$、加强为 $a_{n+1} > 3b_n$ 三种方法，体会其中区别.

加强归纳的方法在数论和组合问题中也有不少妙用，但核心是找到合适的加强命题.