用极坐标解答一道圆锥曲线题

2022-10-19 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_cb8d22f0be2983e2

近日，有学生问了我一道题：

> A、B 在椭圆上，且 AB 过椭圆左焦点 F，过 A、B 作椭圆切线交于点 C. 若 $|AC| = |AB|$，求椭圆离心率的取值范围.

这题答案一看就是一个高次方程的根，不过计算也不太复杂，所以我就写了一下.

引理 1：

点 C 在椭圆的左准线上.

引理 1 的证明：

由配极原理显然.

以左焦点 F 为极点，x 轴正方向为极轴，建立极坐标系. 设椭圆的离心率为 e，焦准距为 p，则椭圆的极坐标方程为 $\rho = \dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$. 不妨设 A 在极轴上方，A 的极坐标为 $\left(\dfrac{ep}{1-e\cos\varphi},\varphi\right)$，则 $B\left(\dfrac{ep}{1+e\cos\varphi},\varphi+\pi\right)$. 由此可得以下**引理 2** 和**引理 3**.

引理 2：

焦点弦长公式：$|AB| = \dfrac{2ep}{1-(e\cos\varphi)^2}$.

引理 2 的证明：

$$\begin{aligned}|AB| =& |AF| + |FB| \\ =& \frac{ep}{1-e\cos\varphi} + \frac{ep}{1+e\cos\varphi} \\ =& \frac{2ep}{1-(e\cos\varphi)^2}\end{aligned}$$

引理 3：

椭圆切线斜率公式：$k_{AC} = -\dfrac{\cos\varphi - e}{\sin\varphi}$.

引理 3 的证明：

$$
\begin{aligned}
k &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta(\rho\cos\theta)\to 0} \frac{\Delta(\rho\sin\theta)}{\Delta(\rho\cos\theta)} \\
&= \lim_{\Delta\theta\to 0} \frac{\dfrac{\Delta(\rho\sin\theta)}{\Delta\theta}}{\dfrac{\Delta(\rho\cos\theta)}{\Delta\theta}} \\
&= \frac{\left(\dfrac{ep\sin\theta}{1-e\cos\theta}\right)'}{\left(\dfrac{ep\cos\theta}{1-e\cos\theta}\right)'} \\
&= -\frac{\cos\theta - e}{\sin\theta}
\end{aligned}
$$

取 $\theta = \varphi$ 即可.

回到原题:

点 A 到左准线距离 $d = \dfrac{\rho_A}{e} = \dfrac{p}{1-e\cos\varphi}$

于是

$$
\begin{aligned}
&|AC|^2 \\
=&(k_{AC}^2+1)d^2 \\
=&\left(\left(\frac{\cos\varphi - e}{\sin\varphi}\right)^2 + 1\right)\frac{p^2}{(1-e\cos\varphi)^2} \\
=&\frac{e^2-2e\cos\varphi+1}{1-\cos^2\varphi}\cdot\frac{p^2}{(1-e\cos\varphi)^2}
\end{aligned}
$$

设 $t = \cos\varphi \in (-1,1)$，则

$$
\begin{aligned}
&|AC| = |AB| \\
\iff &\frac{e^2-2et+1}{1-t^2}\cdot\frac{p^2}{(1-et)^2} = \frac{4e^2p^2}{(1+et)^2(1-et)^2} \\
\iff &\frac{e^2-2et+1}{1-t^2} = \frac{4e^2}{(1+et)^2} \\
\iff &(et-1)(2e^2t^2-(e^3-e)t-(3e^2-1)) = 0
\end{aligned}
$$

由 $e \in (0,1)$，$t \in (-1,1)$ 知，$et-1 \neq 0$，故

$$
2e^2t^2-(e^3-e)t-(3e^2-1) = 0
$$

此方程在 $(-1,1)$ 上有解.

设 $f(t) = 2e^2t^2-(e^3-e)t-(3e^2-1)$，则

$$f(-1)=(e-1)^2(e+1)>0$$

$$f(1)=(e+1)^2(1-e)>0$$

$\Delta=(e^3-e)^2+4\cdot 2e^2(3e^2-1)\geq 0$ 即 $e^2(e^4+22e^2-7)\geq 0$，结合 $e\in(0,1)$ 知：

$$e\in\left[\sqrt{8\sqrt{2}-11},1\right)$$

此时，对称轴 $t=\dfrac{e^3-e}{4e^2}=\dfrac{e}{4}(1-\dfrac{1}{e^2})<0$，且

$$1-\frac{1}{e^2}\geq 1-\frac{1}{8\sqrt{2}-11}=\frac{8\sqrt{2}-12}{8\sqrt{2}-11}$$

而

$$\begin{aligned}&\frac{8\sqrt{2}-12}{8\sqrt{2}-11}>-4\\ \Longleftrightarrow\ &3-2\sqrt{2}<8\sqrt{2}-11\\ \Longleftrightarrow\ &5\sqrt{2}>7\end{aligned}$$

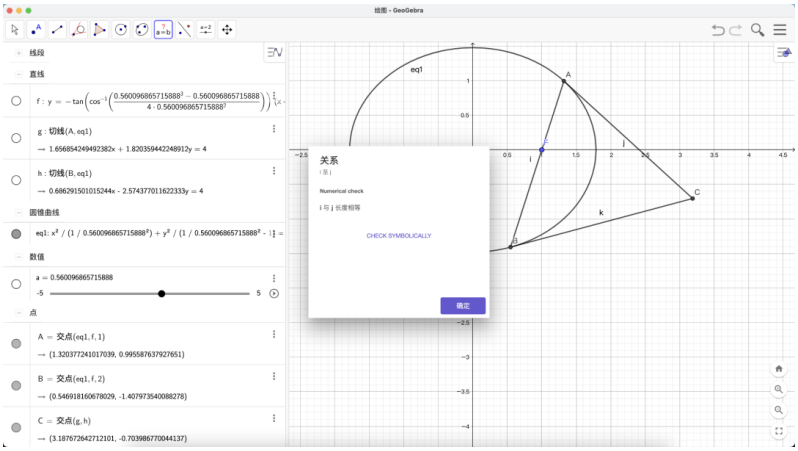
显然成立.

故 $\dfrac{e}{4}(1-\dfrac{1}{e^2})>\dfrac{e}{4}\cdot(-4)=-e>-1.$

于是对称轴在 $(-1,0)$ 上，故 $\Delta\geq 0$ 时，$f(t)$ 在 $(-1,1)$ 上必有一根.

本题答案为 $\left[\sqrt{8\sqrt{2}-11},1\right)$.

下图为 e 取得最小值时，$|AC|=|AB|$ 的情况：



注：

引理 3 是个很有用的结论，可以直接推出圆锥曲线的光学性质等一系列和切线有关的结论，读者可以自行证明.