2021 年美国数学奥林匹克（USAMO）

2021-05-02　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_ccfb8f9456e1a64f

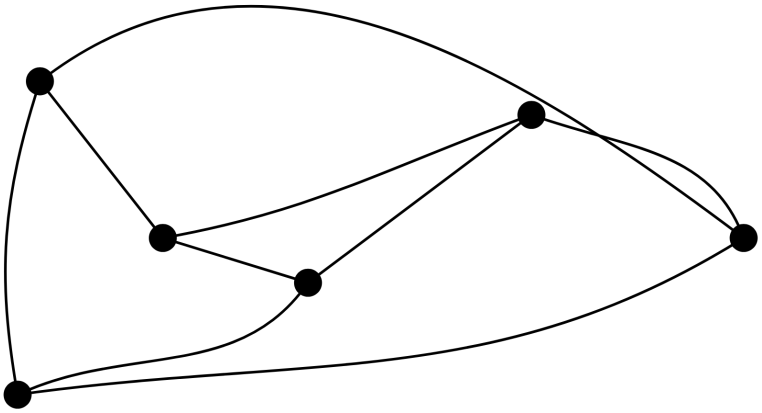
第一天

1. 以锐角 $\triangle ABC$ 三边为边向外作矩形 BCC_1B_2，CAA_1C_2 和 ABB_1A_2. 如果

$$\angle BC_1C + \angle CA_1A + \angle AB_1B = 180^\circ.$$

求证：B_1C_2，C_1A_2，A_1B_2 三线共点.（同 USAJMO 第 2 题）

2. 平面国家公园是欧几里德平面的一个子集，由多条在路口相交的小路组成. 每条小路在两个不同的路口都有其两个端点，而每个路口恰好是三条小路的端点. 两条小路只会在路口处有交点，且交点只能为其端点. 每条小路的两个端点不在同一个路口.（公园的一种可能布局示例如下图，其中有六个路口和九条小路.）

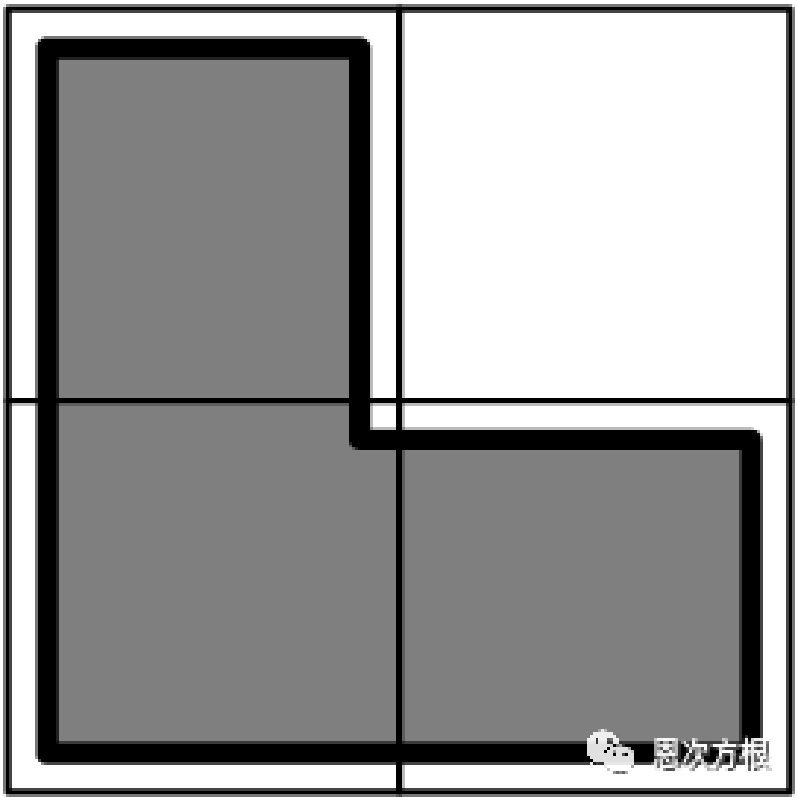


游客按以下步骤穿过公园：她从一个路口开始，沿着小路散步. 在第一条路的尽头，她进入路口并向左转. 在下一个路口，她向右转，依此类推，在每个路口交替左转和右转. 一直这样走，直至回到起点. 在公园的所有可能布局中，步行期间进入任何路口的最大次数是多少?

3. $n \geq 2$ 为整数. 有一块 $n \times n$ 的木板，初始是空的. 在每一分钟，可以完成下列三个操作之一：

- 如果木板上有 3 个单元格组成的 L 形区域（如下图，不允许旋转），且其中都没有石头，则可以在这 3 个单元格中各放置一块石头；
- 如果某一行的每一个单元格中均有石头，则可以将这一行的所有石头移除；
- 如果某一列的每一个单元格中均有石头，则可以将这一列的所有石头移除。

对于满足怎样条件的 n，可以经过若干次（非零）操作后，使得木板上没有任何石头?



第二天

1. 一个有限的整数集 S 具有以下性质：对于任意 $s \in S$，以及 s 的每个正因子 d，存在唯一的 $t \in S$，满足 $\gcd(s,t) = d$. (s 和 t 可以相等) 求 S 中元素个数的所有可能值. (同 USAJMO 第 5 题)

2. $n \geq 4$ 为正整数. 求如下 $2n$ 元方程组的所有正实数解：

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{a_{2n}} + \frac{1}{a_2}, & a_2 &= a_1 + a_3,\\
a_3 &= \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4}, & a_4 &= a_3 + a_5,\\
a_5 &= \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6}, & a_6 &= a_5 + a_7\\
&\vdots & &\vdots\\
a_{2n-1} &= \frac{1}{a_{2n-2}} + \frac{1}{a_{2n}}, & a_{2n} &= a_{2n-1} + a_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{a_{2n}} + \frac{1}{a_2}, & a_2 &= a_1 + a_3,\\
a_3 &= \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4}, & a_4 &= a_3 + a_5,\\
a_5 &= \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6}, & a_6 &= a_5 + a_7
\end{aligned}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$a_{2n-1}=\frac{1}{a_{2n-2}}+\frac{1}{a_{2n}}, \qquad\qquad a_{2n}=a_{2n-1}+a_1$$

1. 凸六边形 $ABCDEF$ 满足 $AB\parallel DE$，$AB\parallel DE$，$CD\parallel FA$，且

$$AB\cdot DE=BC\cdot EF=CD\cdot FA.$$

设 X，Y，Z 分别为 AD，BE，CF 的中点．证明：$\triangle ACE$ 的外心，$\triangle BDF$ 的外心和 $\triangle XYZ$ 的垂心共线.