用万能公式代换解一道网红试题

2023-02-02　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_cd5d5aff46c9c937

九章 Vector 公众号上发了一道网红试题，我也用代数方法来做一下。

网红试题 @10 几年前的一道题

问题： 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A+2\sin B=2\sin C$. 求 $\dfrac{1}{\sin A}+\dfrac{1}{\sin B}-\dfrac{1}{\sin C}$ 的最小值.

解答（PDF 中已展开）

解答：

由万能公式：$\sin\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$.

设 $a=\tan\dfrac{A}{2}$，$b=\tan\dfrac{B}{2}$，$c=\tan\dfrac{C}{2}$，则由三角形中的常见恒等式知 $ab+bc+ca=1$.

则条件变为 $\dfrac{2a}{1+a^2}+\dfrac{4b}{1+b^2}=\dfrac{4c}{1+c^2}$,

分母：$1+a^2=ab+bc+ca+a^2=(a+b)(a+c)$，同理有另两式.

于是两边同乘以公分母 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 后，条件变为：

$$a(b+c)+2b(c+a)=2c(a+b)$$

即 $ac=3ab$，也即 $c=3b$.

代入 $ab+bc+ca=1$，得：$4ab+3b^2=1$，即 $a=\dfrac{1-3b^2}{4b}$.

因此

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}-\frac{1}{\sin C}\\
=&\frac{1+a^2}{2a}+\frac{1+b^2}{2b}-\frac{1+c^2}{2c}\\
=&\frac{1}{2a}+\frac{a}{2}+\left(\frac{1+b^2}{2b}-\frac{1+9b^2}{6b}\right)\\
=&\frac{1}{2a}+\frac{a}{2}+\frac{1-3b^2}{3b}\\
=&\frac{1}{2a}+\frac{a}{2}+\frac{4a}{3}\\
=&\frac{1}{2a}+\frac{11a}{6}\\
\geq&2\sqrt{\frac{1}{2a}\cdot\frac{11a}{6}}\\
=&\frac{\sqrt{33}}{3}
\end{aligned}$$

当且仅当 $\dfrac{1}{2a}=\dfrac{11a}{6}$ 即 $a=\sqrt{\dfrac{3}{11}}$ 时，等号成立.

故最小值为 $\dfrac{33}{3}$.