2024 年阿尔·花剌子密初中数学竞赛

2024-06-06 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_ce250d4f1cfd75c0

阿尔·花剌子密，波斯数学家、天文学家、地理学家。代数与算术的整理者，被誉为“代数之父”。

2024 年阿尔·花剌子密初中数学竞赛

第一天

1. 给定面积为 S 的 $\triangle ABC$. 每一次操作可以移动三角形的一个顶点，同时保持面积不变. 求证：能通过有限次操作，将 $\triangle ABC$ 变为任意面积为 S 的 $\triangle DEF$.

2. 存在多少个 $x \in \{1, 2, 3, \cdots, 2024\}$，使得存在连续 x 个非负整数之和等于另外连续 $2024 + x$ 个连续非负整数之和?

3. 求所有 $x, y, z \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，使得：

$$\begin{cases} (3x^2 + y^2)\sqrt{1 - 4z^2} \geq z; \\ (3y^2 + z^2)\sqrt{1 - 4x^2} \geq x; \\ (3z^2 + x^2)\sqrt{1 - 4y^2} \geq y. \end{cases}$$

4. 对 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的一个排列，若其前 k 项的算术平均值是严格递增的，则称这个排列**均值递增**. 对固定的 n，在 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的任意均值递增的排列中：

(1) 求最后一项的最小可能值；

(2) 求 n 可能排在的最小位次.

2024 年阿尔·花剌子密初中数学竞赛

第二天

5. 在一个派对中，每个人恰好是 14 个人的朋友（不包含自身）. 若两人为朋友，则他们恰有 6 个公共朋友；若两人不为朋友，则他们恰有 2 个公共朋友. 求这个派对的总人数.

6. a,b,c 为不同实数，满足 $a+b+c=0$，且

$$a^2-b=b^2-c=c^2-a$$

求 $ab+bc+ca$ 的所有可能值.

7. 两圆 $\odot O_1,\odot O_2$ 交于 P,Q 两点. 设 ω 为 $\triangle PO_1O_2$ 的外接圆，ω 和 $\odot O_1$ 再次交于点 A，和 $\odot O_2$ 再次交于点 B. 已知点 Q 在 $\triangle PAB$ 内部，PQ 和 ω 再次交于点 M. 点 E 在 ω 上，满足 $PQ=QE$. 设 ME 和 AB 交于点 L，求证：$\angle QLA=\angle MLA$.

8. 黑板上写有 3 个正整数. 在每一次操作中，Elbek 将黑板上的 3 个数 a,b,c 替换成 $a+\gcd(b,c),b+\gcd(c,a),c+\gcd(a,b)$. 求证：在有限次操作后，黑板上的 3 个数中有两数相等，且整除第 3 个数.

2024 年阿尔·花剌子密初中数学竞赛

第一天

1. 给定面积为 S的 $\triangle ABC$. 每一次操作可以移动三角形的一个顶点，同时保持面积不变. 求证：能通过有限次操作，将 $\triangle ABC$变为任意面积为 S的 $\triangle DEF$.

2. 存在多少个 $x\in\{1,2,3,\cdots,2024\}$，使得存在连续 x个非负整数之和等于另外连续 $2024+x$个连续非负整数之和?

3. 求所有 $x,y,z\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使得：$$\begin{cases}(3 x^{2}+y^{2}) \sqrt{1-4 z^{2}} \geq z; \\(3 y^{2}+z^{2}) \sqrt{1-4 x^{2}} \geq x; \\(3 z^{2}+x^{2}) \sqrt{1-4 y^{2}} \geq y.\end{cases}$$

4. 对 $\{a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}\}$的一个排列，若其前 k项的算术平均值是严格递增的，则称这个排列**均值递增**. 对固定的 n，在 $\{1,2,\cdots,n\}$的任意均值递增的排列中：

1. 求最后一项的最小可能值；

2. 求 n可能排在的最小位次.

2024 年阿尔 · 花剌子密初中数学竞赛

第二天

5. 在一个派对中，每个人恰好是 14个人的朋友（不包含自身）. 若两人为朋友，则他们恰有 6个公共朋友；若两人不为朋友，则他们恰有 2个公共朋友. 求这个派对的总人数.

6. a,b,c为不同实数，满足 $a+b+c=0$，且 $$a^{2}-b=b^{2}-c=c^{2}-a$$ 求 $ab+bc+ca$的所有可能值.

7. 两圆 $\odot O_{1},\odot O_{2}$交于 P,Q两点.设 ω为 $\triangle PO_{1}O_{2}$的外接圆，ω和 $\odot O_{1}$再次交于点 A，和 $\odot O_{2}$再次交于点 B. 已知点 Q在 $\triangle PAB$内部，PQ和 ω再次交于点 M. 点 E在 ω上，满足 $PQ=QE$. 设 ME和 AB交于点 L，求证：$\angle QLA=\angle MLA$.

8. 黑板上写有 3个正整数. 在每一次操作中，Elbek 将黑板上的 3个数 a,b,c替换成 $a+\gcd(b,c)$,$b+\gcd(c,a)$,$c+\gcd(a,b)$. 求证：在有限次操作后，黑板上的 3个数中有两数相等，且整除第 3个数.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024年阿尔 · 花剌子密初中数学竞赛}\section*{第一天}\ex 给定面积为$S$的$\triangle ABC$.
↪ 每一次操作可以移动三角形的一个顶点，同时保持面积不变. 求证：能通过有限次操作，将$\triangle
↪ ABC$变为任意面积为$S$的$\triangle DEF$. \ex 存在多少个$x\in\{1,2,3,\cdots,2024\}$,
↪ 使得存在连续$x$个非负整数之和等于另外连续$2024+x$个连续非负整数之和？\ex 求所有$x,y,z\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$,
↪ 使得：$$\begin{cases}(3 x^{2}+y^{2}) \sqrt{1-4 z^{2}} \geq z; \\(3 y^{2}+z^{2}) \sqrt{1-4 x^{2}} \geq x; \\(3 z^{2}+x^{2}) \sqrt{1-4
↪ y^{2}} \geq y.\end{cases}$$\ex 对$\{a_{1},a_{2},\cdots,a_{n}\}$的一个排列，若其前$k$项的算术平均值是严格递增的，
↪ 则称这个排列\textbf{均值递增}. 对固定的$n$，在$\{1,2,\cdots,n\}$的任意均值递增的排列中：
↪ \begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item 求最后一项的最小可能值；\item 求$n$可能排在的最小位次.
↪ \end{enumerate}\nextpage\section*{2024年阿尔 · 花剌子密初中数学竞赛}\section*{第二天}\ex 在一个派对中，
↪ 每个人恰好是$14$个人的朋友（不包含自身）. 若两人为朋友，则他们恰有$6$个公共朋友；若两人不为朋友，
↪ 则他们恰有$2$个公共朋友. 求这个派对的总人数. \ex $a,b,c$为不同实数，满足$a+b+c=0$，且$$a^{2}-b=b^{2}-c=c^{2}-a$$
求$ab+bc+ca$的所有可能值. \ex 两圆$\odot O_{1},\odot O_{2}$交于$P,Q$两点. 设$\omega$为$\triangle
↪ PO_{1}O_{2}$的外接圆，$\omega$和$\odot O_{1}$再次交于点$A$，和$\odot O_{2}$再次交于点$B$. 已知点$Q$在$\triangle
↪ PAB$内部，$PQ$和$\omega$再次交于点$M$. 点$E$在$\omega$上，满足$PQ=QE$. 设$ME$和$AB$交于点$L$，求证：
↪ $\angle QLA=\angle MLA$. \ex 黑板上写有$3$个正整数. 在每一次操作中，
↪ Elbek将黑板上的$3$个数$a,b,c$替换成$a+\gcd(b,c)$,$b+\gcd(c,a)$,$c+\gcd(a,b)$. 求证：在有限次操作后，
↪ 黑板上的$3$个数中有两数相等，且整除第$3$个数.
```