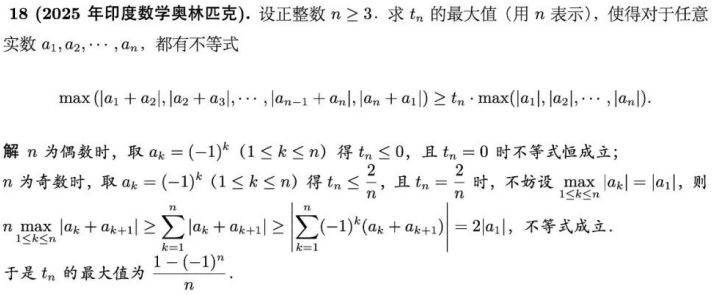
一分钟做不等式系列（1）——2025 年 INMO 第 4 题

2025-01-22　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_d000fb47cf0472a3

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。



18 (2025 年印度数学奥林匹克). 设正整数 $n \geq 3$. 求 t_n 的最大值（用 n 表示），使得对于任意实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，都有不等式

$$\max(|a_1+a_2|, |a_2+a_3|, \cdots, |a_{n-1}+a_n|, |a_n+a_1|) \geq t_n \cdot \max(|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|).$$

解 n 为偶数时，取 $a_k = (-1)^k$ $(1 \leq k \leq n)$ 得 $t_n \leq 0$，且 $t_n = 0$ 时不等式恒成立；

n 为奇数时，取 $a_k = (-1)^k$ $(1 \leq k \leq n)$ 得 $t_n \leq \dfrac{2}{n}$，且 $t_n = \dfrac{2}{n}$ 时，不妨设 $\max\limits_{1 \leq k \leq n} |a_k| = |a_1|$，则

$$n \max_{1 \leq k \leq n} |a_k + a_{k+1}| \geq \sum_{k=1}^{n} |a_k + a_{k+1}| \geq \left| \sum_{k=1}^{n} (-1)^k (a_k + a_{k+1}) \right| = 2|a_1|，\text{不等式成立}.$$

于是 t_n 的最大值为 $\dfrac{1-(-1)^n}{n}$.

新开一个系列，分享一些被我“秒”的不等式，难度一般在联赛一左右，欢迎大家供题。