小学生也能看懂的 2024 年 IMO 预选题 A2 解答

2025-07-16 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_d1a04ace7242f42e

题目：

设 n 是正整数，非负整数 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 满足 $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = n$. 求

$S = 2^0 x_0^2 + 2^1 x_1^2 + \cdots + 2^n x_n^2$

的最小可能值.

解答（PDF 中已展开）

解答：

构造数表如下：

1	3	5	7	9	…
2	6	10	14	18	…
4	12	20	28	36	…
8	24	40	56	72	…
16	48	80	112	144	…
…	…	…	…	…	…

即对任意 $i, j \in \mathbb{N}$，第 i 行第 j 列为 $2^i \cdot (2j+1)$，于是每个正整数在数表中恰出现一次，且数表中每行从左到右递增.

注意到第 i 行的前 x_i 项之和为

$2^i \cdot (1 + 3 + \cdots + 2x_i - 1) = 2^i x_i^2$

题目变为：

> 从数表的第 k 行取前 x_k 个数（$0 \le k \le n$），共取 n 个数，求这些数之和的最小值.

由所取的数为互不相等的 n 个正整数，它们之和不小于

$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

又数表中每行从左到右递增，取完 $1, 2, \cdots, n$ 时，它们的左侧不再有未取的数.

故最小值为 $\dfrac{n(n+1)}{2}$.