2026 年重庆市预赛复数不等式解答

2026-05-18　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_d2e80cce659904a3

各地预赛题目汇总，方便大家打印使用，答案网上都能找到，就不发了。

原题第 (1) 问有提示，这里直接做一般情况：

题目： 给定正整数 n，复数 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 满足 $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k = 1$，求 $\sum\limits_{k=1}^{n} (|z_k + \mathrm{i}| - |z_k|)$ 的最大值.

解答（PDF 中已展开）

答案： $n - 2 + \sqrt{2}$

构造： $z_1 = 1$，$z_2 = \cdots = z_n = 0$

证明： 对 n 归纳，$n = 1$ 时为等式.

假设结论对 n 成立，则对 $n+1$，将 $z_n + z_{n+1}$ 视为整体，有

$$\sum_{k=1}^{n-1} (|z_k + \mathrm{i}| - |z_k|) + |z_n + z_{n+1} + \mathrm{i}| - |z_n + z_{n+1}| \le n - 2 + \sqrt{2}$$

只需证明：

$$|z_n + \mathrm{i}| - |z_n| + |z_{n+1} + \mathrm{i}| - |z_{n+1}| \le |z_n + z_{n+1} + \mathrm{i}| - |z_n + z_{n+1}| + 1$$

更一般地，对复数 a, b, c，有 Hlawka 不等式：

$$|a| + |b| + |c| + |a + b + c| \ge |a + b| + |b + c| + |c + a|$$

两边平方后，由恒等式（即为原题第 (1) 问）

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |a + b + c|^2 = |a + b|^2 + |b + c|^2 + |c + a|^2$$

和三角不等式

$$2|ab| + 2|c(a+b+c)| \ge 2|(b+c)(c+a)| 2|bc| + 2|a(a+b+c)| \ge 2|(c+a)(a+b)| 2|ca| + 2|b(a+b+c)| \ge 2|(a+b)(b+c)|$$

四式相加即证.