2023 年日本初中数学奥林匹克（决赛）

2023-02-15　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_d343d685a6332966

1. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$AB < BC$，$AC < BC$，Γ 为其外接圆．设 Γ_1 和 Γ_2 分别为以 B、C 为圆心，且过点 A 的圆．设 Γ_1 和 Γ_2、Γ_1 和 Γ、Γ_2 和 Γ 分别交于点 D、E、F（均异于点 A）．求证：$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 相似．

2. 黑板上写有 2023 个不同的正实数，从这些数字中选择两个不同的数字 x 和 y，并计算 $\dfrac{xy}{(x+y)^2}$ 的值．若一共有 k 个不同的取值，求 k 的最小值．

3. 设 n 为正整数．起初，A 将从 1 到 n^2 的所有正整数不重复地填入 $n \times n$ 的网格的每一个方格中．接下来，B 选择了一些没有公共边的方格，将这些方格中的所有整数相加，结果即为 B 的得分．求最大的正整数 M，使得不论 A 如何填入数字，B 总能使自己的得分不小于 M．

4. 求所有的正有理数组 (a,b,c)，使得 $a+\dfrac{c}{b}$，$b+\dfrac{a}{c}$，$c+\dfrac{b}{a}$ 均为整数．

5. 在 $\triangle ABC$ 中，设 Γ 为其外接圆，M 为边 AC 的中点．过 M 的一条直线与 BC 和 AB 分别交于点 P 和点 Q，且 P、B、C 三点顺次排列，P 和 B 不重合．设 N 为线段 PQ 的中点，直线 AN 和 Γ 相交于点 R（异于 A、N）．求证：$\triangle PRN$ 的外接圆与直线 BC 相切．

欢迎各位读者将题目解答投稿至邮箱：encifanggen@qq.com

试题原文：

2023年日本ジュニア数学オリンピック本選

(公財) 数学オリンピック財団

問　　題[1]

2023年2月11日 試験時間4時間5題

1. $AB < BC$, $AC < BC$ なる鋭角三角形 ABC があり, その外接円を Γ とする. 点 B, C を中心とし A を通る円をそれぞれ Γ_1, Γ_2 とする. Γ_1 と Γ_2, Γ_1 と Γ, Γ_2 と Γ の交点のうち A でない方をそれぞれ D, E, F とするとき, 三角形 ABC と三角形 DEF は相似であることを示せ.
ただし, XY で線分 XY の長さを表すものとする.

2. 黒板に2023個の相異なる正の実数が書かれている. この中から相異なる2数 x, y を選んで $\dfrac{xy}{(x+y)^2}$ と表せる数はちょうど k 種類であった. このとき, k としてありうる最小の値を求めよ.

3. n を正の整数とする. まず, A さんが $n \times n$ のマス目の各マスに1以上 n^2 以下の相異なる整数を1つずつ書き込む. 次に, B さんがどの2マスも辺を共有して隣りあわないようないくつかのマスを選び, それらのマスに書かれている整数の総和を**得点**とする. A さんの書き込み方によらず, B さんが得点をつねに M 以上にできるような整数 M としてありうる最大の値を求めよ.

4. 正の有理数の組 (a, b, c) であって,

$$a + \frac{c}{b}, \quad b + \frac{a}{c}, \quad c + \frac{b}{a}$$

がすべて整数になるようなものをすべて求めよ.

5. 三角形 ABC において, その外接円を Γ とし, 辺 AC の中点を M とする. M を通るある直線が直線 BC, AB とそれぞれ点 P, Q で交わっている. ただし, 3点 P, B, C はこの順に並んでおり, P と B は相異なる. 線分 PQ の中点を N とすると, 直線 AN と Γ が A, N と異なる点 R で交わった. このとき, 三角形 PRN の外接円は直線 BC に接することを示せ.

以上

[1]Copyright ©2023 by Mathematical Olympiad Foundation of Japan.
著作権は数学オリンピック財団に帰属します.