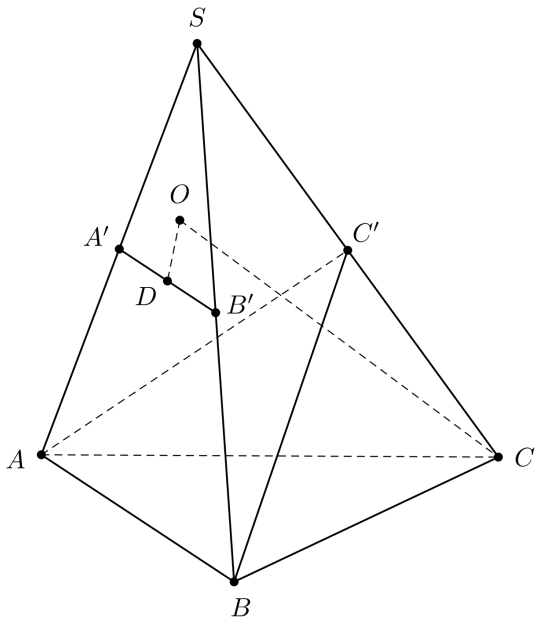
用线性幂差引理解 2025 年清华强基立体几何题

2025-07-02　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_d389bf18edbb2d5b

题目：

正三棱锥 $S-ABC$ 中，底边长为 4，SA,SB,SC 的中点分别为 A',B',C'，$A'B'$ 的中点为 D，三棱锥 $S-ABC'$ 的外接球球心为 O，$OC^2-OD^2=AB^2$．则三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 _____.



分析：

只需求建立等量关系，求出侧棱长即可.

核心条件为 $OC^2-OD^2=AB^2=16$，注意 O 是球心，这使我们想到球幂定理，而结合 D 为 $A'B'$ 中点，可以考虑使用线性幂差引理（易证对球也成立）.

解答（PDF 中已展开）

解答：

记 $\rho_1(X),\rho_2(X)$ 分别为点 X 对球 O 和点球 S 的球幂，则 $f(X)=\rho_1(X)-\rho_2(X)$ 关于 X 是线性的.

设 $SA=2x$，球 O 的半径为 R，则

$\rho_1(C)-\rho_1(D)=OC^2-OD^2=16\rho_1(C)=CC'\cdot CS=2x^2$

$$\begin{aligned}f(D)=&\frac{1}{2}(f(A')+f(B'))\\=&\frac{1}{2}f(S)+\frac{1}{4}f(A)+\frac{1}{4}f(B)\\=&0+\frac{0-4x^2}{4}+\frac{0-4x^2}{4}\\=&-2x^2\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\rho_1(D)=&DS^2-2x^2\\=&(x^2-1^2)-2x^2\\=&-x^2-1\end{aligned}$$

于是 $2x^2-(-x^2-1)=16$，即 $x^2=5$.

$V_{S-ABC}=\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot 4^2\cdot\sqrt{20-\frac{1}{3}\cdot 4^2}=\frac{8\sqrt{11}}{3}$