2025 年 USAMO 几何题证明

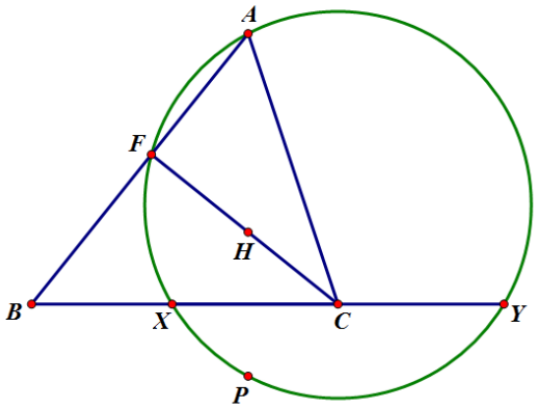
2025-03-21　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_d3e27d2b9fbcdf0a

上课前看到数之谜上 USAMO 的题目出来了，看了一下几何题，很快就做出来了...

题目：

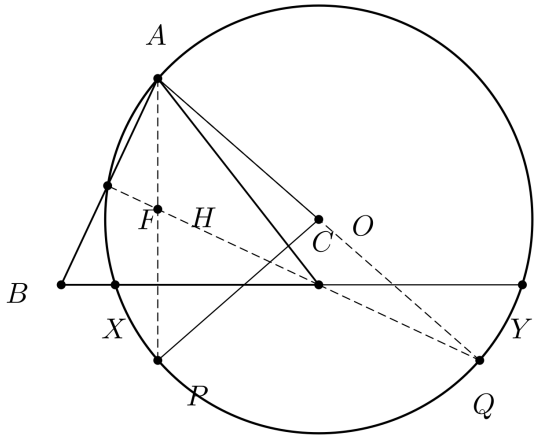
如图，H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心，CF 是高，P 是 H 关于 BC 的对称点. 设 $\triangle AFP$ 的外接圆与直线 BC 交于点 X, Y，求证：C 是 XY 的中点.



解答（PDF 中已展开）

证明：

作 $\odot(AFP)$ 的外心 O，A 的对径点 Q，连接 AP, AQ, PQ, CP, CQ.



由 AQ 为直径知 $\angle AFQ = \angle APQ = 90°$.

又 H 为垂心，故 $CF \perp AF$，于是 F, C, Q 共线.

由 $CP = CH$ 知，PC 为直角 $\triangle HPQ$ 的斜边中线，于是 $CQ = CP$，即 $OC \perp PQ$.

由 $AH \perp BC$ 知 $PQ \parallel XY$，于是 $OC \perp XY$，即 C 为 XY 中点，证毕.