一道无理数集合问题的图论解法

2021-08-01　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_d44912aaab17a468

今天给学生讲了一道 2019 年百子 S8 等级的考试题目.

题目：一个由实数构成的集合 M 称为“幸运集“，若它满足以下性质：

1. 对每个 $x,y\in M$，$x\neq y$，数 $x+y$，xy 均不为 0，且恰好有一个是有理数；
2. 对每个 $x\in M$，x^2 是无理数.

求幸运集中元素个数的最大可能值.

解答（PDF 中已展开）

分析：条件 1 给出了幸运集中任意两个不同元素之间的关系：要么和为有理数，要么积为有理数. 于是可以想到将其转化为一道简单的图论问题.

对 M 中的两个不同元素 x 和 y，若 $x+y\in\mathbb{Q}$，则在 x 和 y 之间连一条红边，若 $xy\in\mathbb{Q}$，则在 x 和 y 之间连一条蓝边.

除题目中已给出的外，对于幸运集 M 中任意三个不同元素 x，y，z，有以下几个结论：

1. $x+y$，$y+z$，$z+x$ 不同时为有理数. 否则
$$2x=(z+x)+(x+y)-(y+z)\in\mathbb{Q}$$
与条件 2 矛盾；
2. xy，yz，zx 不同时为有理数. 否则
$$x^2=\frac{zx\cdot xy}{yz}\in\mathbb{Q}$$
与条件 2 矛盾.

到这里，容易想到拉姆塞问题. 因为将 M 中所有边红蓝二染色后，必不存在同色三角形，于是 M 中至多有 5 个元素. 然而尝试后发现无法构造出满足题意的五元集合. 原因是 M 中的边有更高的要求：

1. **（2 的加强）**xy，xz 不同时为有理数. 否则除 2 的情形外，有 $y+z\in\mathbb{Q}$. 于是
$$x=\frac{xy+xz}{y+z}\in\mathbb{Q}$$
与条件 2 矛盾.

于是 M 中不存在红色三角形，且蓝边不相邻.

如果 M 中有不少于 5 个点，则 A_1A_2，A_1A_3，A_1A_4，A_1A_5 中蓝边至多一条，故至少有三条红边. 由拉姆塞问题的证明过程可知必存在红色三角形，矛盾.

如果 M 中有 4 个点，同上分析可知每个点恰连出 2 条红边，1 条蓝边，且蓝边不相邻. 于是一种构造为：红边为 A_1A_2，A_2A_3，A_3A_4，A_4A_1；蓝边为 A_1A_3，A_2A_4.

即 a_1+a_2，a_2+a_3，a_3+a_4，$a_4+a_1\in\mathbb{Q}$；a_1a_3，$a_2a_4\in\mathbb{Q}$.

令 $a_1=1+\sqrt{2}$，$a_2=2-\sqrt{2}$，$a_3=-1+\sqrt{2}$，$a_4=-2-\sqrt{2}$ 即可.

于是幸运集中元素个数的最大可能值为 4.