用概率告诉你怎么“蒙”多项选择题

2024-01-15 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_d4a848d3bf3d5555

本文仅作理论探究，请勿用于实践。

新高考数学试卷的第 9 题至第 12 题为多项选择题，每小题 5 分，四个选项中有多个选项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

我们先统计历年新高考真题的答案分布情况：

	9	10	11	12
2020年新高考I卷	ACD	BC	ABD	AC
2020年新高考II卷	CD	ACD	BC	ABD
2021年新高考I卷	CD	AC	ACD	BD
2021年新高考II卷	AC	BC	ABD	ACD
2022年新高考I卷	ABD	AC	BCD	BC
2022年新高考II卷	AD	ACD	CD	BC
2023年新高考I卷	BD	ACD	ABC	ABD
2023年新高考II卷	AC	AC	BCD	ABD

一共 32 道多项选择题，其中正确选项是 2 项的有 17 道，正确选项是 3 项的有 15 道。由此粗略地估计，在新高考的多项选择题中，正确选项是 2 项和 3 项的概率均为 $\frac{1}{2}$（这里认为四个选项全部正确为小概率事件，不进行考虑）。

接下来考虑以下场景（注意到如果确定了三个选项，则答案必为这三个；如果排除了两个选项，则答案必为另外两个选项。所以在需要蒙答案的场景中，确定的选项数为 0,1,2，排除的选项数为 0,1，共有 6 种需要考虑的场景）：

先给结论（表格中给的为使得分的数学期望最高的策略）：

已确定选项数 \ 已排除选项数	0	1
0	从四个选项中随便蒙一个	剩下的三个选项全蒙
1	只选择已确定的答案	再蒙剩下的两个答案
2	只选择已确定的答案	只选择已确定的答案

需要说明的是：得分期望最高的策略并不一定是最优策略，还需综合考虑方差等因素。

下面进行计算：

场景 1：四个选项都无法判断必然正确或必然错误。

我们有以下选择：

(1) 随意蒙一个答案。

如果正确选项为 2 项，则共有 $C_4^2 = 6$ 种组合，其中有 3 种包含了我们蒙的答案；

如果正确选项为 3 项，则共有 $C_4^3 = 4$ 种组合，其中有 3 种包含了我们蒙的答案。

因此得分的数学期望为：

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{6} \times 2 + \frac{3}{6} \times 0 \right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 0 \right) = \frac{5}{4}$$

(2) 随意蒙两个答案。

如果正确选项为 2 项，则共有 6 种组合，只有完全选对才能得 5 分，其余情况不得分；

如果正确选项为 3 项，则共有 4 种组合，其中有 2 种包含了我们蒙的答案。

得分的数学期望为：

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{6} \times 5 + \frac{5}{6} \times 0 \right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{4} \times 2 + \frac{2}{4} \times 0 \right) = \frac{11}{12}$$

(3) 随意蒙三个答案。

得分的数学期望为：

$$\frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} \times 5 + \frac{3}{4} \times 0 \right) = \frac{5}{8}$$

因此，从得分的数学期望看，此时从四个选项中随便蒙一个的收益最高。

场景 2: 已排除一个必然错误的选项。

我们有以下选择：

(1) 随意蒙一个答案。

如果正确选项为 2 项，则共有 $C_3^2 = 3$ 种组合，其中有 2 种包含了我们蒙的答案；

如果正确选项为 3 项，则只有一种可能，即为剩下的 3 项全选。

得分的数学期望为：

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 0 \right) + \frac{1}{2} \times 2 = \frac{5}{3}$$

(2) 随意蒙两个答案。

如果正确选项为 2 项，则共有 $C_3^2 = 3$ 种组合，只有完全选对才能得 5 分，其余情况不得分；

如果正确选项为 3 项，则只有一种可能，即为剩下的 3 项全选。

得分的数学期望为：

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\times 5+\frac{2}{3}\times 0\right)+\frac{1}{2}\times 2=\frac{11}{6}$$

(3) 蒙剩下三个答案。

得分的数学期望为：

$$\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{2}$$

因此，从得分的数学期望看，此时将剩下三个选项全选的收益最高。（但方差也最大）

场景 3: 已确定一个必然正确的选项。

我们有以下选择：

(1) 只选择已确定的答案，得分为 2.

(2) 再随意蒙一个答案。

如果正确选项为 2 项，则共有 $\mathrm{C}_3^1=3$ 种组合，其中只有全部选择正确才能得 5 分，其余情况不得分；

如果正确选项为 3 项，则共有 $\mathrm{C}_3^2=3$ 种组合，其中有 2 种包含了我们蒙的答案。

得分的数学期望为：

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3}\times 5+\frac{2}{3}\times 0\right)+\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\times 2+\frac{1}{3}\times 0\right)=\frac{3}{2}$$

(2) 再随意蒙两个答案。

得分的数学期望为：

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times 5=\frac{5}{6}$$

因此，从得分的数学期望看，此时只选择已确定的答案的收益最高。

场景 4: 已排除一个必然错误的选项，并确定一个必然正确的选项。

我们有以下选择：

(1) 只选择已确定的答案，得分为 2.

(2) 再随意蒙一个答案。

如果正确选项为 2 项，则共有 $\mathrm{C}_2^1=2$ 种组合，其中只有全部选择正确才能得 5 分，其余情况不得分；

如果正确选项为 3 项，则只有一种可能，即为剩下的 2 项全选。

得分的数学期望为：

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times 5+\frac{1}{2}\times 0\right)+\frac{1}{2}\times 2=\frac{9}{4}$$

(3) 再蒙剩下两个答案。

得分的数学期望为:

$$\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{2}$$

因此，从得分的数学期望看，此时再蒙剩下的两个答案的收益最高。

场景 5: 已确定两个必然正确的选项。

我们有以下选择:

(1) 只选择已确定的答案。

如果正确选项为 2 项，必得 5 分。

如果正确选项为 3 项，必得 2 分。

得分的数学期望为:

$$\frac{1}{2}\times 5+\frac{1}{2}\times 2=\frac{7}{2}$$

(2) 再蒙一个答案。

得分的数学期望为:

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 5=\frac{5}{4}$$

因此，从得分的数学期望看，此时只选择已确定的答案的收益最高。

场景 6: 已确定两个必然正确的选项，并排除一个必然错误的选项。

我们有以下选择:

(1) 只选择已确定的答案。

如果正确选项为 2 项，必得 5 分。

如果正确选项为 3 项，必得 2 分。

得分的数学期望为:

$$\frac{1}{2}\times 5+\frac{1}{2}\times 2=\frac{7}{2}$$

(2) 再蒙剩下的一个答案。

得分的数学期望为:

$$\frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$$

因此，从得分的数学期望看，此时只选择已确定的答案的收益最高。