一道一试函数值域问题的不同解法

2022-09-17　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_d59d96f8fb61fa4b

2001 年全国高中数学联合竞赛一试第 11 题如下：

函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域为 _____.

解答（PDF 中已展开）

答案： $\left[1,\frac{3}{2}\right)\cup[2,+\infty)$

方法一：

$y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-3x+2}=y-x\geq 0$

两边平方得 $(2y-3)x=y^2-2.$

从而，$y\neq\frac{3}{2}$ 且 $x=\frac{y^2-2}{2y-3}.$

由 $y-x=y-\frac{y^2-2}{2y-3}\geq 0$

$\Rightarrow \frac{y^2-3y+2}{2y-3}\geq 0$

$\Rightarrow 1\leq y<\frac{3}{2}$ 或 $y\geq 2.$

任取 $y\geq 2$，令 $x=\frac{y^2-2}{2y-3}$，易知 $x\geq 2.$

于是 $x^2-3x+2\geq 0$ 且 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}.$

任取 $1\leq y<\frac{3}{2}$，令同样 $x=\frac{y^2-2}{2y-3}$，易知 $x\leq 1.$

于是 $x^2-3x+2\geq 0$ 且 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}.$

因此，所求函数的值域为 $\left[1,\frac{3}{2}\right)\cup[2,+\infty).$

注：

本方法为参考答案上所给的方法. 有一定局限性，如将函数改为 $y=2x+\sqrt{x^2-3x+2}$，则不再适用.

方法二：

由 $x^2-3x+2\geq 0$，得 $x\leq 1$ 或 $x\geq 2.$

又 $x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4},$

设 $x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\sec\theta$，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right).$

则 $y=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sec\theta+\frac{1}{2}|\tan\theta|.$

当 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，

$$\begin{aligned} y =& \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sec\theta + \frac{1}{2}\tan\theta \\ =& \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} \\ =& \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

又 $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$，

则 $\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \in [1, +\infty)$，

$y \in [2, +\infty)$.

类似地，当 $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时，$y \in \left[1, \frac{3}{2}\right)$.

因此，所求函数的值域为 $\left[1, \frac{3}{2}\right) \cup [2, +\infty)$.

注：

形如 $\sqrt{x^2 - a^2}$（$|x| \geq a$）等代数式中的 x 可以运用正（余）割代换.

方法三：

$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

令 $f'(x) > 0$ 得，$x > 2$；令 $f'(x) < 0$ 得，$x < 1$. 因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 递减，在 $(2, +\infty)$ 递增.

又 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{3}{2}$，$f(1) = 1$，$f(2) = x$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

因此，所求函数的值域为 $\left[1, \frac{3}{2}\right) \cup [2, +\infty)$.

注：

本方法比较直接，函数单调性也容易求出. 唯一难点在 $x \to -\infty$ 时，$f(x)$ 的极限，求法如下：

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) =& \lim_{x\to-\infty} (x + \sqrt{x^2-3x+2}) \\ =& \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{x - \sqrt{x^2-3x+2}} \\ =& \lim_{x\to-\infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}} \\ =& \frac{3}{2} \end{aligned}$$

方法四：

由 $x^2 - 3x + 2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$，

作代换：$\sqrt{x^2-3x+2} = \left|x - \frac{3}{2}\right| - t$，其中 t 在 $x \geq 2$ 和 $x \leq 1$ 时能分别取遍 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$.

则

$$\begin{aligned}&\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\\=&\left(\left|x-\frac{3}{2}\right|-t\right)^2\\=&\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-2t\left|x-\frac{3}{2}\right|+t^2\end{aligned}$$

即

$$\left|x-\frac{3}{2}\right|=\frac{4t^2+1}{8t}$$

于是

$$\begin{aligned}y=&x+\left|x-\frac{3}{2}\right|-t\\=&\left(x-\frac{3}{2}\right)+\left|x-\frac{3}{2}\right|-t+\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(1)$x\leq 1$ 时，$y=-t+\dfrac{3}{2}\in\left[1,\dfrac{3}{2}\right)$.

(2)$x\geq 2$ 时，

$$\begin{aligned}y=&2\left|x-\frac{3}{2}\right|-t+\frac{3}{2}\\=&\frac{4t^2+1}{4t}-t+\frac{3}{2}\\=&\frac{1}{4t}+\frac{3}{2}\\\in&[2,+\infty)\end{aligned}$$

注：

这种换元能够通过引入 t，直接去掉根号，使得计算量大大降低.