2024 年第三届白俄罗斯-伊朗友谊赛

2024-08-04 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_d65eb1d7ceadbd42

2024 年第三届白俄罗斯-伊朗友谊赛

第一天

程国根 译

1. 给定一个多面体 P. Mikita 声称他可以在 P 的每个面上写一个整数，满足写下的数不全为 0，且对于 P 的每个顶点 V，包含 V 的所有面上的数之和为 0. Matvei 声称他可以在 P 的每个顶点上写一个整数，满足写下的数不全为 0，且对于 P 的每个面 F，F 中每个顶点上的数之和为 0. 求证：若 P 的棱数为奇数，那么至少有一个男孩是对的.

2. 给定整数 $n \geq 2$. 正实数 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ 满足：$\sum_{k=1}^{n} x_k = 4n$，$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = n$. 求证：$\frac{x_n}{x_1} \geq 7 + 4\sqrt{3}$.

3. 设整数 $a > 1$ 不为 4 的倍数. 求证：存在无穷多个 $4k-1$ 型的素数 p，使得存在正整数 $d < \frac{p-1}{2}$，满足 $p \mid a^d - 1$.

2024 年第三届白俄罗斯-伊朗友谊赛

第二天

程国根　译

4. 求证：不定方程 $2+x^3y+y^2+z^2=0$ 无整数解.

5. $\triangle ABC$ 的外心为 O，外接圆为 Γ. 点 D 满足 $BD\perp BC$，且 A,D 在直线 BC 的异侧. 点 E 满足 $\angle ADB=\angle BDE$，且 $\angle EBD+\angle ACB=90^\circ$. 在直线 AD 上取点 P，使得 $OP\perp BC$. 点 Q 为 Γ 上任意一点，在直线 BQ 上取点 R，使得 $PQ\parallel DR$. 求证：$\angle ARB=\angle BRE$.（所有角都同向）

6. Vika 将某一些正整数称作“好的”，且在任意连续 10 个正整数中，至少有一个正整数是好的. 求证：存在无穷多个正整数 n，使得 $ab-cd=2n^2$，其中 a,b,c,d 均为好的.

2024 年第三届白俄罗斯-伊朗友谊赛

第一天

{程国根　译}

1. 给定一个多面体 P. Mikita 声称他可以在 P的每个面上写一个整数，满足写下的数不全为 0，且对于 P的每个顶点 V，包含 V的所有面上的数之和为 0. Matvei 声称他可以在 P的每个顶点上写一个整数，满足写下的数不全为 0，且对于 P的每个面 F，F中每个顶点上的数之和为 0. 求证：若 P的棱数为奇数，那么至少有一个男孩是对的.

2. 给定整数 $n\ge 2$. 正实数 $x_{1}\le x_{2}\le\cdots\le x_{n}$满足：$\sum_{k=1}^{n}x_{k}=4n$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_{k}}=n$. 求证：$\frac{x_{n}}{x_{1}}\ge 7+4\sqrt{3}$.

3. 设整数 $a>1$不为 4的倍数. 求证：存在无穷多个 $4k-1$型的素数 p，使得存在正整数 $d<\frac{p-1}{2}$，满足 $p\mid a^{d}-1$.

2024 年第三届白俄罗斯-伊朗友谊赛

第二天

{程国根　译}

4. 求证：不定方程 $2+x^3y+y^2+z^2=0$无整数解.

5. $\triangle ABC$的外心为 O，外接圆为 Γ. 点 D满足 $BD\perp BC$，且 A,D在直线 BC的异侧. 点 E满足 $\angle ADB=\angle BDE$，且 $\angle EBD+\angle ACB=90^{\circ}$. 在直线 AD上取点 P，使得 $OP\perp BC$. 点 Q为 Γ上任意一点，在直线 BQ上取点 R，使得 $PQ\parallel DR$. 求证：$\angle ARB=\angle BRE$.（所有角都同向）

6. Vika 将某一些正整数称作“好的”，且在任意连续 10个正整数中，至少有一个正整数是好的. 求证：存在无穷多个正整数 n，使得 $ab-cd=2n^{2}$，其中 a,b,c,d均为好的.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024年第三届白俄罗斯-伊朗友谊赛}\section*{第一天}\flushright{程国根\quad 译}\ex 给定一个多面体$P$.
↪ Mikita声称他可以在$P$的每个面上写一个整数，满足写下的数不全为$0$，且对于$P$的每个顶点$V$，
↪ 包含$V$的所有面上的数之和为$0$. Matvei声称他可以在$P$的每个顶点上写一个整数，满足写下的数不全为$0$，
↪ 且对于$P$的每个面$F$，$F$中每个顶点上的数之和为$0$. 求证：若$P$的棱数为奇数，那么至少有一个男孩是对的. \vfill\ex
↪ 给定整数$n\ge 2$. 正实数$x_{1}\le x_{2}\le\cdots\le x_{n}$满足：$\sum_{k=1}^{n}x_{k}=4n$，
↪ $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_{k}}=n$. 求证：$\frac{x_{n}}{x_{1}}\ge 7+4\sqrt{3}$. \vfill\ex 设整数$a>1$不为$4$的倍数. 求证：
↪ 存在无穷多个$4k-1$型的素数$p$，使得存在正整数$d<\frac{p-1}{2}$，满足$p\mid a^{d}-1$.
↪ \vfill\nextpage\section*{2024年第三届白俄罗斯-伊朗友谊赛}\section*{第二天}\flushright{程国根\quad 译}\ex 求证：
↪ 不定方程$2+x^3y+y^2+z^2=0$无整数解. \vfill\ex $\triangle ABC$的外心为$O$，外接圆为$\Gamma$. 点$D$满足$BD\perp
↪ BC$，且$A,D$在直线$BC$的异侧. 点$E$满足$\angle ADB=\angle BDE$，且$\angle EBD+\angle ACB=90^{\circ}$.
↪ 在直线$AD$上取点$P$，使得$OP\perp BC$. 点$Q$为$\Gamma$上任意一点，在直线$BQ$上取点$R$，使得$PQ\parallel
↪ DR$. 求证：$\angle ARB=\angle BRE$. （所有角都同向）\vfill\ex Vika将某一些正整数称作“好的”，
↪ 且在任意连续$10$个正整数中，至少有一个正整数是好的. 求证：存在无穷多个正整数$n$，使得$ab-cd=2n^{2}$，
↪ 其中$a,b,c,d$均为好的. \vfill
```