数学竞赛每日一练第 23 期解答

2021-06-27 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_d7e338bfad18c040

本题为 2021 年浙江省高考第 10 题的加强

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}(n\in\mathbb{N}^+)$，记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证：$\dfrac{5}{2}<S_{100}<3$.

解答（PDF 中已展开）

证明首先易知 $a_n>0$，所以 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}<a_n$，$\{a_n\}$ 单调递减，故 $a_n\le 1$.

一方面，由

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{a+\sqrt{a_n}}\Rightarrow a_{n+1}+a_{n+1}\sqrt{a_n}=a_n$$

$\therefore a_{n+1}=\dfrac{a_n-a_{n+1}}{\sqrt{a_n}}$.

而 $\sqrt{a_n}>\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}\right)$

$$\therefore a_{n+1}<\frac{a_n-a_{n+1}}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}\right)}=2\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore S_{100}<&1+2(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}+\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}+\cdots+\sqrt{a_{99}}-\sqrt{a_{100}})\\=&1+2(1-\sqrt{a_{100}})\\<&3\end{aligned}$$

另一方面，易知 $n\ge 2$ 时，$a_n\le\dfrac{1}{2}$.

先证明：$n\ge 2$ 时，$\sqrt{a_n}<\dfrac{7}{12}\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}\right)$. 这等价于 $5\sqrt{a_n}<7\sqrt{a_{n+1}}$，也等价于 $25a_n<49a_{n+1}$，即

$$25a_n<49\cdot\frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\iff\sqrt{a_n}<\frac{24}{25}(n\ge 2)$$

显然成立.

当 $n\ge 2$ 时，

$$a_{n+1}>\frac{a_n-a_{n+1}}{\frac{7}{12}\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}\right)}=\frac{12}{7}\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}\right)$$

且由

$$\begin{aligned}
&a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\\
\Rightarrow&\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1+\sqrt{a_n}}{a_n}=\frac{1}{a_n}+\sqrt{\frac{1}{a_n}}\\
\Rightarrow&\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\sqrt{\frac{1}{a_n}}\geq 1
\end{aligned}$$

累加得 $\frac{1}{a_{100}}\geq 100$，即 $a_{100}\leq\frac{1}{100}$. 因此

$$\begin{aligned}
S_{100}>&1+\frac{1}{2}+\frac{12}{7}\left(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}+\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4}+\cdots+\sqrt{a_{99}}-\sqrt{a_{100}}\right)\\
=&1+\frac{1}{2}+\frac{6\sqrt{2}}{7}-\frac{12}{7}\sqrt{a_{100}}\\
\geq&\frac{3}{2}+\frac{6\sqrt{2}}{7}-\frac{6}{35}\\
>&\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

最后一个不等式等价于 $6\sqrt{2}>8.2$，显然成立.

于是 $\frac{5}{2}<S_{100}<3$.