# 利用 Schur 不等式的一个加强证明 Iran96 不等式

2022-09-15 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_d92175153406f7ab

求最大的正实数 $k$，使得对任意 $a$，$b$，$c\geq 0$，都有

$$\sum a(a-b)(a-c)\geq k\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

**证明：** 令 $c=0$ 得：

$$a^2(a-b)+b^2(b-a)\geq k\frac{a^2b^2(a-b)^2}{ab(a+b)}$$

即

$$((a+b)^2-kab)(a-b)^2\geq 0$$

令 $a-b=\varepsilon\to 0$ 即得：$k\leq 4$.

下证：$k=4$ 时，不等式成立.

不妨设 $a\geq b\geq c$，则

$$\begin{aligned}&\sum a(a-b)(a-c)\\=&(a+b-c)(a-b)^2+c(a-c)(b-c)\\\geq&(a+b-c)(a-b)^2\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}\\\leq&\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{ab(a+b)}\\\leq&\frac{(a-b)^2(a-c)(b-c)}{a+b}\\\leq&\frac{(a-b)^2a(b-c)}{a+b}\end{aligned}$$

故只需证：

$$\begin{aligned}&(a+b-c)(a-b)^2\geq\frac{4a(b-c)(a-b)^2}{a+b}\\\Longleftrightarrow\ &a+b-c\geq\frac{4a(b-c)}{a+b}\end{aligned}$$

$$\iff (a+b)^2 - c(a+b) \geq 4ab - 4ac$$
$$\iff (a-b)^2 + c(3a-b) \geq 0$$

显然成立.

下面用此不等式来证明 Iran96 不等式.

只需取 $k = \dfrac{1}{4}$，并" 注意到" 恒等式：

$$\sum a(a-b)(a-c) - \frac{1}{4}\frac{(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$
$$= (ab+ac+bc)\sum \frac{(a+b)(a+c)}{b+c} - \frac{9}{4}(a+b)(a+c)(b+c)$$