# Mathematical Reflections 2022 年第二期征解题

2022-03-18 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_d9415a3898d94ed7

## Junior Problems

**J583.** 设 $m$ 和 $n$ 为正整数. 求证:

$$27^{2m+n+1}+27^{m+2n+1}-27^{m+n+1}+1$$

有大于 $6\cdot 27^{\min(m,n)}$ 的真因子.

**J584.** 有理数 $x$, $y$, $z$ 满足 $3x^2+2022yz-2016zx$, $3y^2+2022xz-2016xy$, $z^2+674xy-672yz$ 均为有理数的平方. 求证: $x=y=z=0$.

**J585.** 实数 $a,b,c>1$ 满足

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}=1.$$

求证:

$$abc+44\geq 9(a+b+c).$$

**J586.** 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC$, $AD$、$BE$、$CF$ 为三条高. 以 $BD$ 为直径的圆交 $AB$ 于 $M$, 交 $BE$ 于 $N$. 直线 $MN$ 交 $AC$ 于 $Q$, 交 $CF$ 于 $P$. 设线段 $DC$ 的中点为 $S$. 求证: $\triangle SQP$ 为等腰三角形.

**J587.** $a$, $b$, $c$ 均为非负实数, 且至多一个为 0. 求证:

$$\frac{a^2}{a^2+bc}+\frac{b^2}{b^2+ca}+\frac{c^2}{c^2+ab}+\frac{a^3+b^3+c^3+9abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 3.$$

并说明等号成立条件.

**J588.** 求所有非负整数 $x$, $y$, $z$, 使得

$$4^x+3^y=z^2.$$

## Senior Problems

**S583.** 求方程

$$(2x^2-10x+50)(2y^2-10y+50)=2022^2$$

的整数解.

**S584.** 在任意 $\triangle ABC$ 中，求证：

$$(b+c)m_a+(c+a)m_b+(a+b)m_c\geq 3\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}.$$

**S585.** 不等边 $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\Gamma$，$N$ 为九点圆圆心．直线 $AN$ 和 $\Gamma$ 交于点 $D$．设 $N_1$ 为 $\triangle BCD$ 的九点圆圆心．求证：$A$、$N$、$N_1$、$D$ 四点共线，且 $AD=2NN_1$.

**S586.** 在任意三角形中，求证：

$$(s^2+r^2+10Rr)(4R+r)\leq 8Rs^2.$$

**S587.** 凸四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC$ 和 $BD$ 交于点 $E$．点 $M$ 和点 $N$ 分别为边 $AB$ 和 $CD$ 的中点．线段 $MN$ 和 $AC$ 交于点 $P$，和 $BD$ 交于点 $Q$．求证：

$$\frac{PQ}{MN}=\frac{|[BCE]-[ADE]|}{[ABCD]},$$

其中 $[XYZ]$ 表示 $XYZ$ 的面积.

**S588.** 求所有三元非负整数组 $(a,b,c)$，使得

$$2^a3^b+7=c^3.$$

## Undergraduate Problems

**U583.** 给定整数 $k\geq 1$，设

$$P_n(x)=x^n(x^k-x^{k-1}-\cdots-x-1)-1.$$

求证：每个多项式 $P_n(x)$ 恰有一个正数根 $r_n$，且数列 $r_1$，$r_2$，$\cdots$，$r_n$ 递减.

**U584.** $m$，$n$，$p$ 均为大于 1 的正整数．$p\times p$ 的实矩阵 $A$ 满足 $A^mB=BA^m$，$A^nB=BA^n$ 对任意 $p\times p$ 的实矩阵 $B$ 均成立．求证：若 $\gcd(m,n)=1$，则 $AB=BA$ 对任意 $p\times p$ 的实矩阵 $B$ 均成立.

**U585.** 计算：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[n^2\left(\zeta(2)-1-\frac{1}{2^2}-\cdots-\frac{1}{n^2}\right)-n+\frac{1}{2}-\frac{1}{6n}\right].$$

**U586.** 求所有函数 $f$，$g$：$\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{Q}$，都有

$$f(x)f(x+y)=f(y)^2f(x-y)^2g(y).$$

**U587.** 对 $x,y\geq 5$，证明：

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{y}}\leq\left(\frac{4}{x^2+y^2}\right)^{\frac{2}{x+y}}.$$

**U588.** 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\beta^{-\frac{1}{n}}(n\pi,n\pi)=4^{\pi},$$

其中 $\beta(x,y)$ 为第一类欧拉积分.

## Olympiad Problems

**O583.** 设 $a$，$b$，$c$ 为实数，求证:

$$a^3+b^3+c^3-3abc\leq(a^2+b^2+c^2+2)^{\frac{3}{2}}-3(a+b+c),$$

等号成立当且仅当 $ab+bc+ca=1$.

**O584.** 设 $ABCD$ 为圆外接四边形，$AC$ 和 $BD$ 交于点 $O$. 设 $r_1$、$r_2$、$r_3$、$r_4$、$R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$ 分别为 $\triangle AOB$、$\triangle BOC$、$\triangle COD$、$\triangle DOA$ 的内切圆半径和 $O$-旁切圆半径. 求证:

$$\frac{AB}{1-\frac{r_1}{R_1}}+\frac{CD}{1-\frac{r_3}{R_3}}=\frac{BC}{1-\frac{r_2}{R_2}}+\frac{DA}{1-\frac{r_4}{R_4}}.$$

**O585.** 在任意 $\triangle ABC$ 中，求证:

$$\frac{9}{16}\left(\frac{12r^2}{R^2}-1\right)\leq\sum_{cyc}\cos A\sin B\sin C\leq\frac{9}{4}\left(\frac{3}{4}-\frac{r^2}{R^2}\right).$$

**O586.** 凸四边形 $ABCD$ 的对角线 $AC$ 和 $BD$ 交于点 $E$. 在四边形 $ABCD$ 外部构造 $\triangle ABP$ 和 $\triangle CDQ$，使得 $\angle PAB=\angle DAE$，$\angle PBA=\angle CBE$，$\angle QDC=\angle ADE$，$\angle QCD=\angle BCE$. 求证: $P$，$E$，$Q$ 三点共线.

**O587.** 设 $a$，$b$，$c$，$d$ 均为正实数. 求证:

$$22a+25b+30c+30d\geq360\sqrt[3]{\frac{abcd}{2a+5b+10c+30d}},$$

并说明等号何时成立.

**O588.** 正实数 $a$，$b$，$c$，$d$ 满足

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+d}=1.$$

求证:

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd+18\geq6(a+b+c+d).$$