2024 年美国数学奥林匹克（初中组）

2024-03-24 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_d952623e02216c1f

2024 年美国数学奥林匹克（初中组）

程国根译

第一天

1. 设 $ABCD$ 为圆内接四边形，$AB=7$，$CD=8$．点 P,Q 在线段 AB 上，满足 $AP=BQ=3$．点 R,S 在线段 CD 上，满足 $CR=DS=2$．求证：$PQRS$ 四点共圆．

2. 设 m,n 为正整数，集合 $S=\{(x,y)\mid 1\le x\le 2m,\le y\le 2n,x,y\in\mathbb{Z}\}$．称由 mn 个矩形组成的集合是快乐的，如果这些矩形的边均平行于坐标轴，且 S 中的每一点恰为其中一个矩形的顶点．求证：证明快乐集合的个数是奇数．

3. 数列 a_n 定义如下：$a_1=2$，对任意整数 $n\ge 1$，$a_{n+1}=a_n^{n+1}-1$．．求证：对任意素数 $p>2$，和正整数 k，都存在正整数 n，使得 $p^k\mid a_n$．

1

第二天

4. 设整数 $n \geq 3$. 罗文和科林在一个 $n \times n$ 的方格网上玩游戏，每个小方格都被染为红、蓝二色之一. 罗文可以任意交换两行的位置，科林可以任意交换两列的位置. 如果一种染色方式满足以下条件，则称它是有序的：

(1) 无论罗文如何对行进行排列，科林总可以对列进行排列，以恢复原来的网格染色；

(2) 无论科林如何对列进行排列，罗文宗可以对行进行排列，以恢复原来的网格染色。

对固定的 n，共有多少种有序的染色方式?

5. 求所有函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得对任意 $x, y \in \mathbb{R}$，都有

$$f(x^2 - y) + 2yf(x) = f(f(x)) + f(y).$$

6. 锐角 $\triangle ABC$ 内一点 D 满足 $\angle DAC = \angle ACB$，$\angle BDC = 90^\circ + \angle BAC$. 点 E 在射线 BD 上，满足 $AE = EC$. M 为 BC 中点. 求证：直线 AB 与 $\triangle BEM$ 的外接圆相切.

2024 年美国数学奥林匹克（初中组）

程国根译

第一天

1. 设 $ABCD$为圆内接四边形，$AB=7$，$CD=8$. 点 P,Q在线段 AB上，满足 $AP=BQ=3$. 点 R,S在线段 CD上，满足 $CR=DS=2$. 求证：$PQRS$四点共圆.

2. 设 m,n为正整数，集合 $S=\{(x,y)\mid 1\le x\le 2m,\le y\le 2n,x,y\in\mathbb{Z}\}$. 称由 mn个矩形组成的集合是快乐的，如果这些矩形的边均平行于坐标轴，且 S中的每一点恰为其中一个矩形的顶点. 求证：证明快乐集合的个数是奇数.

3. 数列 a_{n}定义如下：$a_{1}=2$，对任意整数 $n\ge 1$，$a_{n+1}=a_{n}^{n+1}-1$.. 求证：对任意素数 $p>2$，和正整数 k，都存在正整数 n，使得 $p^{k}\mid a_{n}$.

第二天

4. 设整数 $n\ge 3$. 罗文和科林在一个 $n\times n$ 的方格网上玩游戏，每个小方格都被染为红、蓝二色之一. 罗文可以任意交换两行的位置，科林可以任意交换两列的位置. 如果一种染色方式满足以下条件，则称它是有序的：

1. 无论罗文如何对行进行排列，科林总可以对列进行排列，以恢复原来的网格染色；
2. 无论科林如何对列进行排列，罗文宗可以对行进行排列，以恢复原来的网格染色。

对固定的 n，共有多少种有序的染色方式?

5. 求所有函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意 $x,y\in\mathbb{R}$，都有 $$f(x^2-y)+2yf(x)=f(f(x))+f(y).$$

6. 锐角 $\triangle ABC$内一点 D满足 $\angle DAC=\angle ACB$，$\angle BDC=90^{\circ}+\angle BAC$. 点 E在射线 BD上，满足 $AE=EC$. M为 BC中点. 求证：直线 AB与 $\triangle BEM$的外接圆相切.

解答（PDF 中已展开）

```
\section*{2024年美国数学奥林匹克（初中组）}\subsection*{程国根译}\section*{第一天}\ex 设$ABCD$为圆内接四边形，$AB=7$，
↪ $CD=8$. 点$P,Q$在线段$AB$上，满足$AP=BQ=3$. 点$R,S$在线段$CD$上，满足$CR=DS=2$. 求证：$PQRS$四点共圆.
↪ \vfill\ex 设$m,n$为正整数，集合$S=\{(x,y)\mid 1\le x\le 2m,\le y\le 2n,x,y\in\mathbb{Z}\}$.
↪ 称由$mn$个矩形组成的集合是快乐的，如果这些矩形的边均平行于坐标轴，且$S$中的每一点恰为其中一个矩形的顶点. 求证：
↪ 证明快乐集合的个数是奇数. \vfill\ex 数列$a_{n}$定义如下：$a_{1}=2$，对任意整数$n\ge 1$，$a_{n+1}=a_{n}^{n+1}-1$. .
↪ 求证：对任意素数$p>2$，和正整数$k$，都存在正整数$n$，使得$p^{k}\mid a_{n}$. \vfill\section*{第二天}\ex 设整数$n\ge 3$.
↪ 罗文和科林在一个$n\times n$ 的方格网上玩游戏，每个小方格都被染为红、蓝二色之一. 罗文可以任意交换两行的位置，
↪ 科林可以任意交换两列的位置. 如果一种染色方式满足以下条件，则称它是有序的：\begin{enumerate}[label=(\arabic*)]\item
↪ 无论罗文如何对行进行排列，科林总可以对列进行排列，以恢复原来的网格染色；\item 无论科林如何对列进行排列，
↪ 罗文宗可以对行进行排列，以恢复原来的网格染色。\end{enumerate}对固定的$n$，共有多少种有序的染色方式？\vfill\ex
↪ 求所有函数$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使得对任意$x,y\in\mathbb{R}$，都有$$f(x^2-y)+2yf(x)=f(f(x))+f(y).$$\vfill\ex
↪ 锐角$\triangle ABC$内一点$D$满足$\angle DAC=\angle ACB$，$\angle BDC=90^{\circ}+\angle BAC$.
↪ 点$E$在射线$BD$上，满足$AE=EC$. $M$为$BC$中点. 求证：直线$AB$与$\triangle BEM$的外接圆相切. \vfill
```

一年一度全球数学爱好者的盛会，就差你了！

