一分钟做不等式系列（4）——2024 年白俄罗斯-伊朗友谊赛

2025-02-04　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_d9bdde4b22cadbd6

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读。点击图片可放大查看，或前往公众号原文阅读。

21 (2024 年白俄罗斯-伊朗友谊赛). 给定正整数 $n \geq 2$，正实数 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ 满足：$\sum_{k=1}^{n} x_k = 4n$，$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = n$．求证：$\frac{x_n}{x_1} \geq 7 + 4\sqrt{3}$.

证明 由题意知：$\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{x_j}{x_i} + \frac{x_i}{x_j} \right) = 4n^2$，即 $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{x_j}{x_i} + \frac{x_i}{x_j} \right) = 4n^2 - n$.

由 $\frac{x_n}{x_1} \geq 1$，只需证明：$\frac{x_n}{x_1} + \frac{x_1}{x_n} \geq 14$.

反证，若 $\frac{x_n}{x_1} + \frac{x_1}{x_n} < 14$，则由 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ 知：$\forall 1 \leq i < j \leq n$，$\frac{x_j}{x_i} + \frac{x_i}{x_j} < 14$.

下面用数学归纳法证明：若 $0 < x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$，且对 $\forall 1 \leq i < j \leq n$，$\frac{x_j}{x_i} + \frac{x_i}{x_j} < 14$，则 $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{x_j}{x_i} + \frac{x_i}{x_j} \right) < 4n^2 - n$，与题意矛盾，从而本题结论成立.

$n = 1, 2$ 是平凡的．假设上述结论对 n 成立，则在 $n+2$ 时，由 $f(x) = \frac{x}{x_1} + \frac{x_1}{x} + \frac{x_{n+2}}{x} + \frac{x}{x_{n+2}}$ 在 $[x_1, x_{n+2}]$ 下凸，且 $f(x_1) = f(x_{n+2}) = \frac{x_{n+2}}{x_1} + \frac{x_1}{x_{n+2}} + 2 < 16$ 知

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i < j \leq n+2} \left(\frac{x_j}{x_i} + \frac{x_i}{x_j} \right) &= \frac{x_{n+2}}{x_1} + \frac{x_1}{x_{n+2}} + \sum_{i=2}^{n+1} \left(\frac{x_i}{x_1} + \frac{x_1}{x_i} + \frac{x_{n+2}}{x_i} + \frac{x_i}{x_{n+2}} \right) + \sum_{2 \leq i < j \leq n+1} \left(\frac{x_j}{x_i} + \frac{x_i}{x_j} \right) \\
&\leq \frac{x_{n+2}}{x_1} + \frac{x_1}{x_{n+2}} + \sum_{i=2}^{n+1} \left(\frac{x_{n+2}}{x_1} + \frac{x_1}{x_{n+2}} + 2 \right) + \sum_{2 \leq i < j \leq n+1} \left(\frac{x_j}{x_i} + \frac{x_i}{x_j} \right) \\
&< 14 + 16n + 4n^2 - n = 4(n+2)^2 - (n+2)
\end{aligned}$$

因此，结论对 $n+2$ 也成立，证毕.

过程比较长，但思路非常自然。