2023 年孟加拉国数学奥林匹克

2023-03-09　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_d9d8339d2e1fc40e

初级组

1. 求所有非负整数 (x,y)，使得

$$x!+2^y=(x+1)!$$

1. 点 A、B、C 在同一条直线上顺次排列，以 AB 为直径作半圆 ω_1，以 AC 为直径作半圆 ω_2，且 ω_1 和 ω_2 位于 AC 同侧. ω_2 上一点 D 满足 $BD\perp AC$，以 B 为圆心，BD 为半径的圆和 ω_1 交于点 E. AC 上一点 F 满足 $EF\perp AC$. 求证：$BC=BF$.

2. 求不定方程的正整数解：

$$(x+2y)^2+2x+5y+9=(y+z)^2$$

1. 将 2023 个球放入若干个篮子中，每个篮子中球的个数不超过 99. 每一次操作可以移除任意篮子中的若干个球，或者移除一个空的篮子. 求证：存在某种操作顺序，使得最后剩下的每个篮子中球的数量均相等，且总数量不少于 100.

2. 设实数 m，n，p 满足

$$(m+n+p)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)=1.$$

求

$$\frac{1}{(m+n+p)^{2023}}-\frac{1}{m^{2023}}-\frac{1}{n^{2023}}-\frac{1}{p^{2023}}$$

的所有可能值.

1. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，ω 为其外接圆. 点 N 在不包含 B 的弧 AC 上，点 S 在直线 AB 上. ω 在点 N 处的切线交 BC 于点 T，NS 和 ω 交于点 K. 已知 $\angle NTC=\angle KSB$，求证：$CK//AN//TS$.

2. 求证：每个正整数均可以表示为下面的形式：

$$3^{m_1} \cdot 2^{n_1} + 3^{m_2} \cdot 2^{n_2} + \cdots + 3^{m_k} \cdot 2^{n_k}$$

其中 $m_1 > m_2 > \cdots > m_k \geq 0$ 和 $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ 均为整数.

1. 在数轴上给定 n 个区间 $[l_1, r_1]$，$[l_2, r_2]$，$[l_3, r_3]$，$\cdots$，$[l_n, r_n]$. 已知可以将这些区间分为两个集合，使得同一集合中的任意两个区间均不重叠. 求证：至多存在 $n-1$ 对有重叠的区间.

2. 设正 $2n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 内接于圆 ω，点 P 为 ω 上任意一点. H_1，H_2，$\cdots$，H_n 分别为 $\triangle PA_1A_2$，$\triangle PA_3A_4$，$\cdots$，$PA_{2n-1}A_{2n}$ 的垂心. 求证：$P_1P_2\cdots P_n$ 为正 n 边形.

3. Joy 在一块 $n \times n$ 的棋盘上进行游戏. 在每一次操作中，他将棋盘上的一格染色，每个方格至多被染色一次. 与此同时，Joy 会进行计分. 每一次操作中，在将一格 c 染色后，他取出一个以 c 格为中心的“十字架”，其中每一个均已被染色，并将该十字架中方格个数的最大可能值作为该次操作的得分. 在将棋盘上的所有方格染色之后，Joy 的总得分最大值是多少?

   注：十字架的每一支中方格个数不必相等，且可以为 0.

高级组

1. 求所有非负整数 (x, y, z)，使得

$$x! + 2^y = z!$$

1. n 元集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 的所有元素之和为 S. 已知集合中每个元素均小于 $\dfrac{S}{n-1}$. 求证：集合中任意三个元素 a_i，a_j 和 a_k 均满足 $a_i + a_j > a_k$.

2. 对任意正整数 n，定义 $f(n)$ 为不整除 n 的最小正整数. 例如：$f(1) = 2$，$f(6) = 4$. 求证：对任意正整数 n，$f(f(n))$ 和 $f(f(f(n)))$ 中必有一个为 2.

3. 等腰梯形 $ABCD$ 内接于圆 ω，$AB//CD$，P 为 ω 上一点，H_1 和 H_2 分别为 $\triangle PAD$ 和 $\triangle PBC$ 的垂心. 求证：当点 P 在 ω 上运动时，H_1H_2 的长度为定值.

4. f 为 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的可积函数，且满足 $ab = 1$ 时，$af(a) + bf(b) = 1$（改为 af(a)+bf(b)=0）. 求积分：

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx.$$

1. 同初级组第 8 题.

2. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，ω 为其外接圆. 过点 A 作 BC 的垂线，和 BC 交于点 D，和 ω 交于点 K. 过点 A、D 且和 BC 相切于点 D 的圆和 ω 交于点 E. AE 和 BC 交于点 T，TK 和 ω 交于点 S，SD 交 ω 于点 X. 求证：点 X 和点 A 关于 BC 的中垂线轴对称.

3. 同初级组第 10 题.

4. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形. 点 D 在边 BC 上, 且 AD 平分 $\angle BAC$. 直线 l 和 $\triangle ADB$、$\triangle ADC$ 的外接圆分别相切于点 k、L. 点 M、N、P 分别为 BD、DC、KL 的中点. 求证: l 和 $\triangle MNP$ 的外接圆相切.

5. 2023 次实系数多项式 $P(x)=x^{2023}+a_1x^{2022}+\cdots+a_{2022}x+a_{2023}$ 满足 $P(0)+P(1)=0$, 且有 2023 个实根 $r_1, r_2, \cdots, r_{2023}$ (不必互异), 满足 $0 \leq r_1, r_2, \cdots, r_{2023} \leq 1$. 求 $r_1r_2\cdots r_{2023}$ 的最大值.