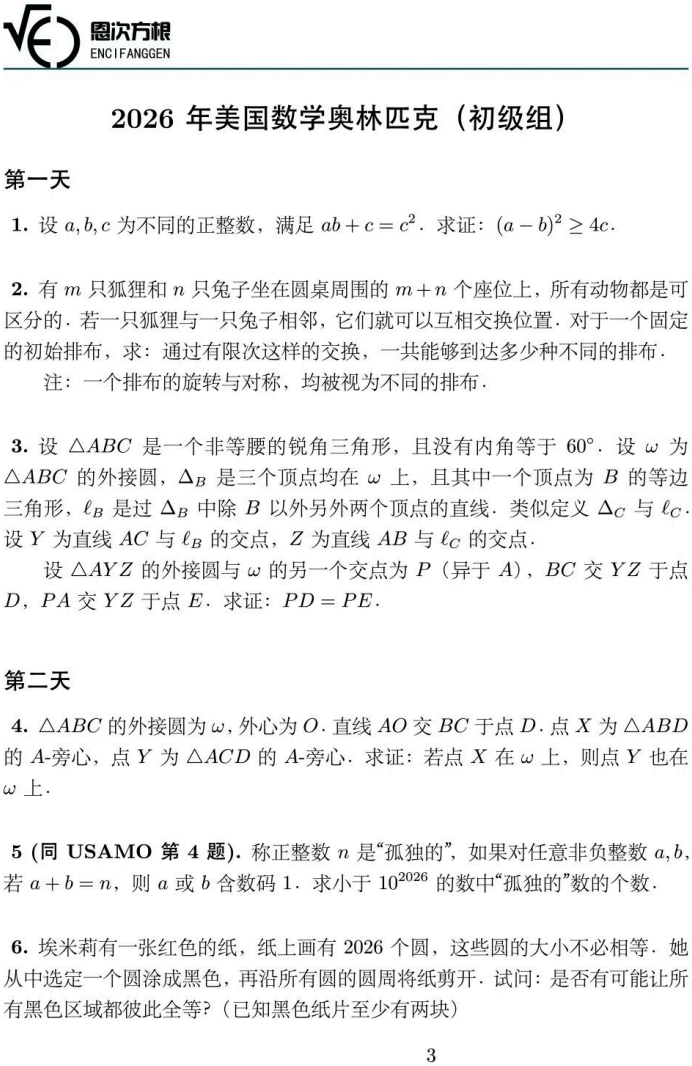
2026 年美国数学奥林匹克（初级组）

2026-03-23　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_db4425e42890aae9

本文为图片版：正文为 1 张图片，图片中的文字无法被站内检索或读屏朗读；下方附本站人工转写的文字版，只作阅读与检索之用，若与原图有出入，以公众号原文为准。



恩次方根
ENCIFANGGEN

2026 年美国数学奥林匹克（初级组）

第一天

1. 设 a, b, c 为不同的正整数，满足 $ab + c = c^2$. 求证：$(a - b)^2 \geq 4c$.

2. 有 m 只狐狸和 n 只兔子坐在圆桌周围的 $m+n$ 个座位上，所有动物都是可区分的. 若一只狐狸与一只兔子相邻，它们就可以互相交换位置. 对于一个固定的初始排布，求：通过有限次这样的交换，一共能够到达多少种不同的排布.

注：一个排布的旋转与对称，均被视为不同的排布.

3. 设 $\triangle ABC$ 是一个非等腰的锐角三角形，且没有内角等于 $60°$. 设 ω 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，Δ_B 是三个顶点均在 ω 上，且其中一个顶点为 B 的等边三角形，ℓ_B 是过 Δ_B 中除 B 以外另外两个顶点的直线. 类似定义 Δ_C 与 ℓ_C. 设 Y 为直线 AC 与 ℓ_B 的交点，Z 为直线 AB 与 ℓ_C 的交点.

设 $\triangle AYZ$ 的外接圆与 ω 的另一个交点为 P（异于 A），BC 交 YZ 于点 D，PA 交 YZ 于点 E. 求证：$PD = PE$.

第二天

4. $\triangle ABC$ 的外接圆为 ω，外心为 O. 直线 AO 交 BC 于点 D. 点 X 为 $\triangle ABD$ 的 A-旁心，点 Y 为 $\triangle ACD$ 的 A-旁心. 求证：若点 X 在 ω 上，则点 Y 也在 ω 上.

5 (同 USAMO 第 4 题). 称正整数 n 是“孤独的”，如果对任意非负整数 a, b，若 $a + b = n$，则 a 或 b 含数码 1. 求小于 10^{2026} 的数中“孤独的”数的个数.

6. 埃米莉有一张红色的纸，纸上画有 2026 个圆，这些圆的大小不必相等. 她从中选定一个圆涂成黑色，再沿所有圆的圆周将纸剪开. 试问：是否有可能让所有黑色区域都彼此全等？（已知黑色纸片至少有两块）

3

本站人工转写（文字版）

下面这段文字由本站对照上方图片逐条录入，公式写成可读的记号，只为方便检索与读屏；它不是公众号原文的一部分，如与图片或原文有出入，请以原文为准。

1. 第一天第 1 题　设 a,b,c 为不同的正整数，满足 $ab+c=c^2$。求证：$(a-b)^2\ge 4c$。
2. 第一天第 2 题　有 m 只狐狸和 n 只兔子坐在圆桌周围的 $m+n$ 个座位上，所有动物都是可区分的。若一只狐狸与一只兔子相邻，它们就可以互相交换位置。对于一个固定的

初始排布，求：通过有限次这样的交换，一共能够到达多少种不同的排布。注：一个排布的旋转与对称，均被视为不同的排布。

3. 第一天第 3 题　设 $\triangle ABC$ 是一个非等腰的锐角三角形，且没有内角等于 60°。设 ω 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，Δ_B 是三个顶点均在 ω 上、且其中一个顶点为 B 的等边三角形，ℓ_B 是过 Δ_B 中除 B 以外另外两个顶点的直线。类似定义 Δ_C 与 ℓ_C。设 Y 为直线 AC 与 ℓ_B 的交点，Z 为直线 AB 与 ℓ_C 的交点。设 $\triangle AYZ$ 的外接圆与 ω 的另一个交点为 P（异于 A），BC 交 YZ 于点 D，PA 交 YZ 于点 E。求证：$PD=PE$。
4. 第二天第 4 题　$\triangle ABC$ 的外接圆为 ω，外心为 O。直线 AO 交 BC 于点 D。点 X 为 $\triangle ABD$ 的 A-旁心，点 Y 为 $\triangle ACD$ 的 A-旁心。求证：若点 X 在 ω 上，则点 Y 也在 ω 上。
5. 第二天第 5 题（同 USAMO 第 4 题）　称正整数 n 是“孤独的”，如果对任意非负整数 a,b，若 $a+b=n$，则 a 或 b 含数码 1。求小于 10^{2026} 的数中“孤独的”数的个数。
6. 第二天第 6 题　埃米莉有一张红色的纸，纸上画有 2026 个圆，这些圆的大小不必相等。她从中选定一个圆涂成黑色，再沿所有圆的圆周将纸剪开。试问：是否有可能让所有黑色区域都彼此全等？（已知黑色纸片至少有两块）