半个世纪前的 IMO 预选题，今天还活跃在考场之上

2025-10-08　原文链接

网站版本 379b168aed55 · 文章 ID h_dcca1d71f6b6f39c

1975 年 IMO 预选题：

设 $x_0 = 5$，$x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$，$\forall n \geq 0$. 求证：$45 < x_{1000} < 45.1$.

证明：

由条件知：

$x_{n+1}^2 = x_n^2 + 2 + \dfrac{1}{x_n^2} > x_n^2 + 2$

于是 $x_n^2 > x_0^2 + 2n = 25 + 2n$，$\forall n \geq 1$.

因此 $x_{1000}^2 > 2025$，即 $x_{1000} > 45$.

另一方面，

$$\begin{aligned} x_{1000}^2 =& x_0^2 + 2000 + \sum_{k=0}^{999} \frac{1}{x_k^2} \\ =& 2025 + \sum_{k=0}^{99} \frac{1}{x_k^2} + \sum_{k=100}^{999} \frac{1}{x_k^2} \\ <& 2025 + 100 \cdot \frac{1}{x_0^2} + 900 \cdot \frac{1}{x_{100}^2} \\ <& 2025 + 100 \times \frac{1}{25} + 900 \times \frac{1}{225} \\ =& 2033 < 45.1^2 \end{aligned}$$

注：

本题为 50 年前的 IMO 预选题，我第一次见是在保送考试的考场上，有幸当场想到了上面这个自以为绝妙的分段放缩方法。当时就觉得这题非常适合放在 2025 年考察，昨天在群里有人问了一道可以分段放缩的题目，故想到此题。

清华大学在 2019 年金秋营考了本题的加强形式：求 x_{1000} 的小数点后两位。也有非积分的做法，感兴趣的读者可以一试。