一分钟做不等式系列（3）——2025 年波兰第一轮第 11 题

2025-01-24　原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_dccf4f58f8a88449

20 (2025 年波兰数学奥林匹克). 给定正整数 l 和正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_l$. 对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$，定义

$$c_n = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_l=n} \frac{(2n)!}{(2k_1)!(2k_2)!\cdots(2k_l)!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_l^{k_l}.$$

求证：对于任意 $n \in \mathbb{Z}_+$，都有 $\sqrt[n]{c_n} \leq \sqrt[n+1]{c_{n+1}}$.

证明 考虑展开式 $(y_1 + y_2 + \cdots + y_l)^m = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_l=m} \frac{m!}{k_1!k_2!\cdots k_l!} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \cdots y_l^{k_l}$.

在其中令 $m = 2n$，$y_k = \sqrt{a_k} x_k$ 可得：

$$c_n = \frac{1}{2^l} \sum_{\varepsilon_k \in \{-1,1\}} \left(\sqrt{a_1} x_1 + \sqrt{a_2} x_2 + \cdots + \sqrt{a_l} x_l\right)^{2n}$$

由幂平均不等式即证.

1. 这次应该是一秒钟，给的提示过于明显了。
2. 最近先发一些之前翻译的题目，大多是翻译完就有思路或者做出来的题，读者后台供的题后面也会发。
3. 应读者的要求，把不带答案的题目放在封面了，大家下次可以先思考再点进来。
4. 这应该是年前最后一篇更新。