2025 年巴尔干预选题 A6 解答

2026-05-19 原文链接

网站版本 1c934d989f84 · 文章 ID h_dddada7e76b8e23e

龚老师在中写了剩余 6 道题目的解答，见 2025 年巴尔干预选 6 个代数题目及解答. 这里我把剩下一道题补上（用 pqr 方法也非常简单）.

题目：

设正实数 a,b,c 满足 $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b=1$，证明：

$\frac{ab+bc+ca}{1+2abc}\leqslant\frac{(a+b+c)^2}{4}$.

解答（PDF 中已展开）

证明：

注意到

$$1+2abc=a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc=(a+b)(b+c)(c+a)$$

原不等式等价于

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}\geqslant\frac{4}{1+2abc}\iff\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\geqslant 2-\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

不妨设 a 最小，由

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\geqslant\frac{a^2+a^2+b^2+c^2}{a^2+ab+bc+ca}=\frac{2a^2+b^2+c^2}{(a+b)(a+c)}.$$

只需证明：

$$\begin{aligned}&(b+c)(2a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(a+b)(b+c)(c+a)-8abc\\\iff&2a^2b+2a^2c+b^3+b^2c+bc^2+c^3\geqslant 2\sum_{\text{sym}}a^2b-4abc\\\iff&b^3+c^3+4abc\geqslant 2ab^2+2ac^2+b^2c+bc^2\\\iff&(b-c)^2(b+c-2a)\geqslant 0\end{aligned}$$

由 $b\geqslant a,c\geqslant a$ 即证.

为庆祝恩次方根公众号五周年，本周末（5 月 22 日—5 月 24 日）将进行送书活动，周五、六、日三天累积送出价值万元的数学书目，留言分享和数学、数学竞赛或本公众号相关故事，即可参与。敬请关注！